ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 21 Dezember 1941 Heft 6

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Berechnung der Reibung und Tragkraft eines endlich breiten Gleitschuhes auf ebener Gleitbahn.

Von *W. Frössel* in Göttingen.

Die vorliegende Arbeit behandelt den dreidimensionalen Strömungsvorgang, wie er zwischen einem endlich breiten ebenen oder balligen Gleitschuh und einer ebenen Gleitbahn auftritt, wenn bei guter Schmierung zwischen beiden eine relative Geschwindigkeit herrscht. In der weiteren Auswertung der entwickelten Theorie wurden insbesondere die Trag- und Reibungskräfte für die genannten Gleitsysteme berechnet. Die Ergebnisse sind zur Erleichterung der Anwendung in Kurven dargestellt.

I. Einleitung.

Das Ziel der hydrodynamischen Schmierungstheorie ist die vollständige Beherrschung der Strömungszustände, insbesondere der Trag- und Reibungszustände im Schmierspalt eines Gleitlagers oder einer Führung mit endlicher Breite bei gegebenen Lager-, Lauf- und Schmierungsgrößen. Dieses bedingt die mathematische Behandlung des dreidimensionalen Strömungsvorganges im Spaltgebiet, die mit einer zweidimensionalen Druckverteilung verbunden ist, wie sie von Michell[1]) für einen schmalen ebenen Gleitschuh (Breite $\leqq$ Länge), von Vogelpohl[2]) für den allgemeinen Gleitschuh nach dem Prinzip des Minimalsatzes der Lagerreibung und von Nahme[3]) für den in der Breite einseitig begrenzten balligen Gleitschuh durchgeführt ist.

Die vorliegende Arbeit gibt eine weitere Lösung des genannten Problems an, die insbesondere für Gleitschuhe mit Breite $\geqq$ Länge konvergiert. Ihre Anwendung in der Praxis ist durch die weitgehende zahlenmäßige Auswertung der Funktionen und Darstellung in Zahlentafeln und Diagrammen wesentlich erleichtert worden. Aber auch hier beschränkt sich wie in den schon erwähnten Arbeiten die theoretische Behandlung auf den Gleitschuh auf ebener Gleitbahn.

II. Entwicklung der Formeln.

a) Allgemeines. Der Strömungsvorgang der dreidimensionalen Spaltströmung zwischen Gleitschuh und Gleitbahn erfordert zu seiner Berechnung gegenüber der zweidimensionalen eine bedeutende Erweiterung der theoretischen Behandlung. In erster Linie macht sich das

[1]) A. G. Michell: Z. Math. Phys. Bd. 52 (1905), S. 123. — Ostwalds Klassiker Nr. 218, Leipzig 1927, S. 202.
[2]) G. Vogelpohl: VDI-Forsch.-Heft 386, Berlin 1937.
[3]) R. Nahme: Ing.-Arch. Bd. 11 (1940), S. 191.

XUM

durch die endliche Begrenzung des Gleitschuhes in der Breite verursachte seitliche Abfließen des Schmiermittels, verbunden mit einem seitlichen Druckabfall, geltend, dessen Auswirkung sich auf die Tragfähigkeit und Reibung des Gleitschuhes fortpflanzt und durch einen erhöhten Arbeitsaufwand ausgeglichen werden muß.

Wie in fast allen Strömungsfragen kommen auch hier zuerst die Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen für Flüssigkeiten in Betracht, die auch für veränderliche Zähigkeit in Vogelpohl[2]) Gl. I ausführlich aufgeführt sind. Um aber bestimmte Lösungen zu erhalten, muß ihre große Vielseitigkeit zunächst durch Vernachlässigung unwichtiger oder sehr kleiner Glieder stark eingeengt werden. Dabei scheiden die Trägheitsglieder infolge der überwiegenden Zähigkeit des Schmiermittels und der im Spalt herrschenden laminaren und stationären Strömung aus. Eine weitere Vereinfachung der Bewegungsgleichungen wird durch die Annahme einer im ganzen Spaltgebiet konstanten Schmiermittelzähigkeit erreicht.

Werden die Koordinaten x, y, z so gelegt, daß die x-Achse mit der Bewegungsrichtung der Gleitbahn, die y-Achse mit der Spalthöhe und die z-Achse mit der Gleitschuhbreite zusammenfällt, so darf die mittlere der entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten u, v, w eines Flüssigkeitselementes als verschwindend klein und die auftretenden Drücke p in dieser y-Richtung als unveränderlich angesehen werden. Unter Berücksichtigung dieser Annahmen vereinfachen und verringern sich die Navier-Stokesschen Gleichungen auf die beiden nachstehenden

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z}+\eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1a),$$

die aber wegen der schwierigen Klammerausdrücke einer Lösung noch wenig zugänglich sind und deshalb auf weitere Vereinfachungen untersucht werden müssen. Letzteres geschieht durch Abschätzen der Größenordnungen der einzelnen Klammerglieder, wozu für y die Größenordnung des Spaltes h, für x die der Gleitschuhlänge l und für z die der Gleitschuhbreite b gesetzt wird, wobei b und l groß gegen h sind. Der Vergleich der zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim\frac{1}{l^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sim\frac{1}{b^2}$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sim\frac{1}{h^2}$ zeigt, daß die nach x und z abgeleiteten Glieder gegen das nach y abgeleitete verschwindend klein und daher vernachlässigbar sind. Die Gl. (1a) gehen somit über in

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z}+\eta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1b),$$

die mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

und den Randbedingungen $y=0$, $u=U$; $y=h$, $u=0$ unter Konstanthaltung von $\frac{\partial p}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$ für veränderliches y auf die allgemeine Differentialgleichung dieses Strömungsvorganges

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{3}{h}\frac{d h}{d x}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{6\eta U}{h^3}\frac{d h}{d x}=0 \text{ [4])} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

führen. Hierin bedeutet h die Spalthöhe, deren Veränderung durch die Gestalt des Gleitschuhes und der Gleitbahn vorgegeben ist und die nur eine Funktion von x sein soll, U die Geschwindigkeit der Gleitbahn und η die Zähigkeit des Schmiermittels. Zur Beschränkung auf die für die praktische Anwendung am wichtigsten Spaltverläufe sind für die weitere mathematische Entwicklung der ebene und der ballige rechteckige Schmierkeil ausgewählt worden.

b) Der ebene Schmierkeil*). Der ebene Schmierkeil wird durch die innere Begrenzung des ebenen Gleitschuhes und der ebenen Gleitbahn gebildet (Bild 1). Die unend-

[4]) O. Reynolds: Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. (A) Bd. 177 (1886), S. 157. Ostwalds Klassiker Nr. 218.

*) Nach Fertigstellung dieser Arbeit wurde mir eine Abhandlung von M. Muskat, F. Morgan und M. W. Meres unter dem Titel „The Lubrication of Plane Sliders of Finite Width" erschienen im Journal Applied Physics, Bd. 11 (1940), Nr. 3, S. 208 bis 219, bekannt, die dasselbe Problem des ebenen Schmierkeils mit gleichem Lösungsansatz in anderer Schreibform enthält. Trotzdem erscheint es nützlich, mit Rücksicht auf die späteren zahlenmäßigen Auswertungen den etwas anders gearteten Entwicklungsgang gekürzt wiederzugeben.

lich breit und lang gedachte Gleitbahn bewegt sich in der angegebenen Pfeilrichtung mit der Geschwindigkeit U unter dem örtlich festgehaltenen Gleitschuh entlang und reißt dabei das vor dem Gleitschuh befindliche Schmiermittel mit in den Schmierspalt hinein. Dabei entstehen unter Mitwirkung der in der Bewegungsrichtung veränderlichen Spaltform die im folgenden gerechneten Trag- und Reibungsgrößen. Bild 1 zeigt einen Schnitt durch die Längsachse des Gleitsystems. Die Spaltbeziehung für den ebenen Schmierkeil lautet bei den kleinen vorkommenden Winkeln δ

$$h = (a - x)\,\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

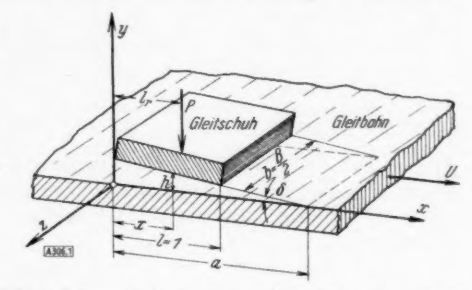


Bild 1. Schematische Darstellung des ebenen Gleitsystems.

worin die Länge a vom Gleitschuhanfang bis zum Schnitt der beiden verlängerten Gleitflächen eine für die Gleitschuhstellung charakteristische Größe darstellt und x der Abstand vom Spaltanfang im Sinne der Gleitbahnbewegung bedeutet. Für beide Werte ist die Gleitschuhlänge als Maßeinheit zu nehmen (vgl. Bild 1). Mit diesem Verlauf erhält die Differentialgleichung (3) die nachstehende Gestalt

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{3}{a-x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{6\eta U}{\delta^2 (a-x)^3} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Als Lösung wird dafür eine Funktion in der Form

$$p = \left(1 - \frac{\operatorname{Cos}\lambda_0 z}{\operatorname{Cos}\lambda_0 b}\right) f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Cos}\lambda_{n-1} z}{\operatorname{Cos}\lambda_{n-1} b} - \frac{\operatorname{Cos}\lambda_n z}{\operatorname{Cos}\lambda_n b}\right) f_n(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

oder ausgeschrieben

$$\left.\begin{aligned} p = \left(1 - \frac{\operatorname{Cos}\lambda_0 z}{\operatorname{Cos}\lambda_0 b}\right) f_0(x) &+ \left(\frac{\operatorname{Cos}\lambda_0 z}{\operatorname{Cos}\lambda_0 b} - \frac{\operatorname{Cos}\lambda_1 z}{\operatorname{Cos}\lambda_1 b}\right) f_1(x) \\ &+ \left(\frac{\operatorname{Cos}\lambda_1 z}{\operatorname{Cos}\lambda_1 b} - \frac{\operatorname{Cos}\lambda_2 z}{\operatorname{Cos}\lambda_2 b}\right) f_2(x) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

angesetzt, die als neue Größen die halbe dimensionslose Gleitschuhbreite $b = \frac{B}{2l}$, die noch zu bestimmenden Werte λ_i und die noch unbekannten Funktionen f_i enthält. Während von den vier Grenzbedingungen, die für die Spaltränder bei $z = \pm b$ und $x = 0$ und 1 den gleichen Spaltdruck p = Außendruck = Null vorschreiben, die beiden der Seitenkanten bei $z = \pm b$ durch die rechte Seite der Gl. (6) erfüllt sind, müssen die beiden übrigen für die Vorder- und Hinterkante bei $x = 0$ und 1 durch richtige Wahl der f_i-Funktionen noch befriedigt werden.

Werden nun die ersten und zweiten Ableitungen nach x und z von Gl. (6) in die Differentialgleichung (5) eingesetzt, so wird diese erfüllt, wenn auch ihre linke Seite verschwindet, d. h. wenn jede der daraus entnommenen, nachstehend aufgeführten Ausdrücke verschwindet. Diese sind gleichzeitig die Differentialgleichungen für die f_i-Funktionen und heißen somit

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad f_0'' - \frac{3}{a-x} f_0' + \frac{6\eta U}{\delta^2 (a-x)^3} = 0, \\ &\text{b)}\quad \frac{\operatorname{Cos}\lambda_0 z}{\operatorname{Cos}\lambda_0 b}\left(f_1'' - \frac{3}{a-x} f_1' + \lambda_0^2 f_1 - f_0'' + \frac{3}{a-x} f_0' - \lambda_0^2 f_0\right) = 0, \\ &\text{c)}\quad \frac{\operatorname{Cos}\lambda_1 z}{\operatorname{Cos}\lambda_1 b}\left(f_2'' - \frac{3}{a-x} f_2' + \lambda_1^2 f_2 - f_1'' + \frac{3}{a-x} f_1' - \lambda_1^2 f_1\right) = 0, \\ &\text{d)}\quad \frac{\operatorname{Cos}\lambda_2 z}{\operatorname{Cos}\lambda_2 b}\left(f_3'' - \frac{3}{a-x} f_3 + \lambda_2^2 f_3 - f_2'' + \frac{3}{a-x} f_2' - \lambda_2^2 f_2\right) = 0, \\ &\text{e)}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die erste dieser Gleichungen ist die Differentialgleichung für den unendlich breiten, ebenen Schmierkeil mit zweidimensionaler Strömung. Sie hat die Lösung

$$f_0 = \frac{6\,\eta\,U}{\delta^2\,(2\,a-1)}\,\frac{x\,(1-x)}{(a-x)^2} \quad \text{(8).}$$

Bei den übrigen Gleichungen ist der Faktor $\frac{\operatorname{Cos}\lambda_{n-1}\,z}{\operatorname{Cos}\lambda_{n-1}\,b}$ $(n=1,2,\ldots)$ stets verschieden von Null, so daß für das geforderte Verschwinden der linken Seiten die Klammerausdrücke sorgen müssen. Diese lassen durch die gleichgebaute Form der ersten und zweiten Hälfte sofort den Wert $f_n = f_{n-1}$ als partikuläre Lösung erkennen. Für die allgemeine Lösung wird nun die Beziehung

$$f_n = f_{n-1} - g_{n-1}$$

angesetzt, die nach Einsetzen der entsprechenden Ableitungen die Klammerausdrücke der Gl. (7) auf die einfachere Form

$$g''_{n-1} - \frac{3}{a-x}\,g'_{n-1} + \lambda^2_{n-1}\,g_{n-1} = 0 \quad \text{(9)}$$

bringt, die die Lösung

$$g_{n-1} = \frac{A_{n-1}\,J_1\{\lambda_{n-1}(a-x)\} + B_{n-1}\,N_1\{\lambda_{n-1}(a-x)\}}{a-x} \quad \text{(10)}$$

hat $(n=1,2,\ldots)$, worin A_{n-1}, B_{n-1} und λ_{n-1} noch verfügbare Konstanten sind und J_1 und N_1 aus bekannten Tabellen[5]) für Zylinderfunktionen (Besselsche Funktionen) entnommen werden können. Wie die Funktionen f müssen auch die Funktionen g (für $x=0$ und 1) verschwinden. Das bedeutet homogene Randbedingungen, die für die Lösungen einer homogenen Differentialgleichung wie Gl. (9) bekanntlich nur Eigenfunktionen zulassen. In solchen Fällen erfährt die numerische Auswertung eine wesentliche Erleichterung, wenn die allgemeine Lösung der Gl. (10) durch eine ihrer Konstanten dividiert wird. Sie heißt dann

$$G_{n-1} = \frac{g_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{J_1\{\lambda_{n-1}(a-x)\} + C_{n-1}\,N_1\{\lambda_{n-1}(a-x)\}}{a-x} \quad \text{(11).}$$

C_{n-1} sowie λ_{n-1} lassen sich allein mit den schon angegebenen Grenzbedingungen $G_{n-1}=0$ für $x=0$ und 1 berechnen. Ihre Bestimmungsgleichungen lauten dann

$$\text{für } x=0 \quad \frac{J_1\{\lambda_{n-1}\,a\} + C_{n-1}\,N_1\{\lambda_{n-1}\,a\}}{a} = 0 \quad \text{(12a),}$$

$$\text{für } x=1 \quad \frac{J_1\{\lambda_{n-1}(a-1)\} + C_{n-1}\,N_1\{\lambda_{n-1}(a-1)\}}{a-1} = 0 \quad \text{(12b).}$$

Die Ermittlung der Eigenwerte λ_{n-1} folgt dann aus

$$J_1\{\lambda_{n-1}(a-1)\} - \frac{J_1(\lambda_{n-1}\,a)}{N_1(\lambda_{n-1}\,a)}\,N_1\{\lambda_{n-1}(a-1)\} = 0 \quad (n=1,2,\ldots) \quad \text{(13).}$$

Für die Anwendung der λ-Werte wird der kleinste positive Eigenwert mit $\lambda_{n-1}=\lambda_0$ und die weiteren in positiver Richtung aufeinander folgenden mit den laufenden Zahlen 1, 2, 3 ... als Indizes bezeichnet. Diese so gefundenen Eigenwerte bestimmen zusammen mit den Konstanten C_{n-1} die Grundformen der Kurven von Gl. (11) und ihre Schnittpunkte mit der x-Achse, wobei die Anzahl der Schnittpunkte in dem betrachteten Bereich $0 \leq x \leq 1$ durch die Ordnungszahl $n-1$ der Gl. (11) angegeben wird.

---

[5]) Jahnke-Emde: Funktionstafeln mit Formeln und Kurven. 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1938. — Watson: A Treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922.

Um die in Gl. (6) stillschweigend vorausgesetzte Konvergenz der Glieder zu erreichen, müssen die höheren Funktionswerte von $f_n = f_{n-1} - g_{n-1}$ in dem ganzen betrachteten Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ gegen Null gehen, d. h. die g-Funktionen müssen sich in dem genannten Gebiet möglichst gut den f-Funktionen anpassen, damit ihre Differenzen klein werden. Es gilt also mit dem in Gl. (11) noch verfügbaren Faktor A_{n-1} die in der Kurvengrundform G_{n-1} bereits angegebenen Funktionswerte derartig zu verändern, daß die folgenden aus $f_{n-1} - g_{n-1}$ neu entstehenden f-Funktionen stets bessere Anpassungsfähigkeiten für die folgenden g-Funktionen bieten. Bei der Auswertung dieser Methode zeigt es sich, daß zum Anpassen an jede weitere f-Funktion immer gerade die mit dem nächsthöheren λ-Wert gebildete g-Funktion geeignet ist. Daraus ergibt sich durch Betrachtung von Gl. (6), daß ihre Konvergenz durch die nach den höheren Gliedern steigenden λ-Werte in den Klammerausdrücken bedeutend gesteigert wird. Das Bild 2 zeigt als Beispiel das Annähern der höheren Funktionswerte f_i an Null für die Gleitschuhlage $a = 1{,}25$. Für andere häufig vorkommende Gleitschuhlagen sind die Funktionswerte f_i sowie die zugehörigen λ_i-Werte in gleicher Weise ermittelt und in der Zahlentafel 1 zusammengestellt.

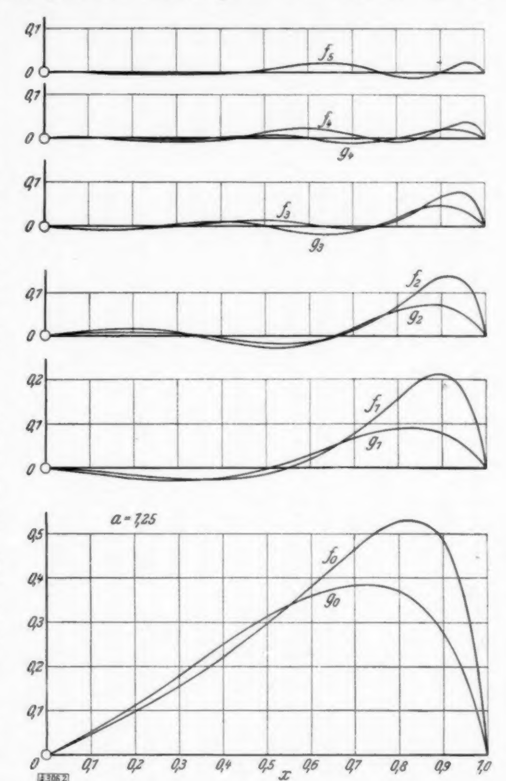


Bild 2. Verlauf der Funktionen f_i und g_i beim ebenen Gleitsystem ($a = 1{,}25$).

Aus den in der Zahlentafel 1 dargestellten Größen ist der gemeinsame Faktor $\frac{6\,\eta\,U}{\delta^2}$ schon herausgezogen worden. Mit dieser Maßnahme lautet nun die Druckgleichung

$$p\Big/\frac{6\,\eta\,U}{\delta^2} = \left(1 - \frac{\operatorname{Cos}\lambda_0\,z}{\operatorname{Cos}\lambda_0\,b}\right) f_0(x) + \sum_{n=1} \left(\frac{\operatorname{Cos}\lambda_{n-1}\,z}{\operatorname{Cos}\lambda_{n-1}\,b} - \frac{\operatorname{Cos}\lambda_n\,z}{\operatorname{Cos}\lambda_n\,b}\right) f_n(x) \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

mit der die Druckverteilung für jede gegebene Gleitschuhstellung a (vgl. Bild 1) über die ganze Gleitschuhfläche errechnet werden kann. Die Rechnung gestaltet sich für die in der Zahlentafel 1 aufgeführten Werte von a besonders einfach, da hierfür die benötigten f_i- und λ_i-Werte unmittelbar daraus entnehmbar und in die Gl. (14) einzusetzen sind. Zu beachten ist, daß für die Größen z und b die Gleitschuhlänge als Maßeinheit genommen werden muß.

Die Gesamttragkraft P des ebenen Gleitschuhes ist durch graphische Integration der Gl. (14) nach x und z erhältlich. Sie liefert bei Division mit der tragenden Gleitschuhfläche, die wegen der Wahl der Gleitschuhlänge als Maßeinheit zahlenmäßig durch die Gleitschuhbreite $B = 2\,b$ ausgedrückt wird, den mittleren Druck oder besser die Tragkraft pro Breiteneinheit in dimensionsloser Form

$$p_r\Big/\frac{6\,\eta\,U}{\delta^2} = \frac{1}{b}\int_0^1\int_0^b \left(p\Big/\left(\frac{6\,\eta\,U}{\delta^2}\right)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = m_g \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15),$$

die aus Gleichgewichtsgründen gleich der zu tragenden Last pro Breiteneinheit sein muß. Aus der Division der Gl. (14) und (15) folgt bei gleichzeitiger Beseitigung der oftmals unbequemen Größen η, U und δ die dimensionslose Druckverteilung p/p_r, die für jede Gleitschuhstellung a eine andere Gestalt besitzt, sonst aber von η, U und δ unabhängig ist. Sie stellt also die Druckverteilung im Schmierspalt für den Belastungsdruck $p_r = 1$ dar und ergibt in einfachster Weise durch Multiplizieren mit jedem anderen gewünschten Belastungsdruck p_r die entsprechende Druckverteilung.

Auch der für die punktförmige Anbringung der Last wichtige Angriffspunkt l_r (Bild 1) läßt sich für jede Gleitschuhstellung a aus der zugehörigen Druckverteilung durch Ermittlung

Zahlentafel 1. Werte der Funktionen $f_0, f'_0; f_1, f'_1; f_2, f'_2; f_3, f'_3; f_4, f'_4; f_5, f'_5; f_6, f'_6$.

x	f_0	f'_0	f_1	f'_1	f_2	f'_2	f_3	f'_3	f_4	f'_4	f_5	f'_5	f_6	f'_6
	$a = 1{,}14$													
	$\lambda_0 = 3{,}5027$		$\lambda_1 = 6{,}5499$		$\lambda_2 = 9{,}6299$		$\lambda_3 = 12{,}7312$		$\lambda_4 = 15{,}8449$		$\lambda_5 = 18{,}9664$		$\lambda_6 = 22{,}0928$	
0	0	0,60115	0	−0,11727	0	0,08627	0	−0,11799	0	0,05026	0	−0,04452	0	0,06329
0,1	0,06501	0,70286	−0,01585	−0,19084	0,01185	0,08475	−0,00815	−0,08640	0,00637	−0,00836	−0,00052	−0,01703	0,00567	−0,04751
0,2	0,14147	0,83149	−0,03596	−0,19840	0,01511	−0,02431	−0,01162	0,02588	−0,00162	−0,14341	−0,00144	−0,01662	−0,00631	−0,13932
0,3	0,23252	0,99649	−0,05245	−0,11366	0,00596	−0,15815	−0,00285	0,13736	−0,01583	−0,09444	−0,01061	−0,09267	−0,01569	0,03891
0,4	0,34240	1,21075	−0,05467	0,09256	−0,01504	−0,24536	0,01092	0,10765	−0,01274	0,17462	−0,01324	−0,00728	−0,00277	0,07025
0,5	0,47684	1,49012	−0,02877	0,45421	−0,03784	−0,17334	0,01276	−0,09236	0,01473	0,31071	0,00050	0,28907	−0,00011	0,03186
0,6	0,64300	1,84566	0,04261	1,00862	−0,03980	0,19541	−0,00595	−0,24368	0,03358	−0,00926	0,03467	0,28337	0,01834	0,35580
0,7	0,84743	2,23780	0,18014	1,77497	0,01546	0,98751	−0,01982	0,08942	0,00933	−0,40452	0,03433	−0,34382	0,04933	0,05548
0,8	1,08132	2,30575	0,40005	2,58295	0,17140	2,16348	0,04229	1,30497	−0,01060	0,28631	−0,00832	−0,30124	0,01075	−0,76976
0,9	1,22070	−0,67817	0,64598	1,55930	0,41946	2,20761	0,24535	2,39634	0,11535	2,18519	0,05272	1,83430	−0,00446	1,17517
0,95	1,02796	−8,65653	0,62314	−3,69205	0,45754	−1,74020	0,32174	−0,25365	0,21020	−2,80520	0,14885	−2,30379	0,08172	−1,88925
1,0	0	−39,85992	0	−27,16251	0	−21,89390	0	−17,48177	0	−13,71571	0	−11,58300	0	−9,13572
	$a = 1{,}18$													
	$\lambda_0 = 3{,}4531$		$\lambda_1 = 6{,}5011$		$\lambda_2 = 9{,}5875$		$\lambda_3 = 12{,}6950$		$\lambda_4 = 15{,}8138$		$\lambda_5 = 18{,}9391$		$\lambda_6 = 22{,}0688$	
0	0	0,52807	0	−0,08302	0	0,11326	0	−0,05849	0	0,07640	0	−0,01897	0	0,02637
0,1	0,05674	0,60938	−0,01174	−0,14453	0,00915	0,06356	−0,00763	−0,07294	0,00397	−0,01077	−0,00292	−0,01940	−0,00033	0,00664
0,2	0,12250	0,70936	−0,02711	−0,15234	0,01320	−0,01778	−0,00919	0,02350	−0,00116	−0,11044	−0,00102	0,01570	−0,00292	−0,03499
0,3	0,19940	0,83297	−0,03978	−0,08688	0,00443	−0,11901	−0,00319	0,12421	−0,01328	−0,05855	−0,00391	−0,04624	−0,00603	0,00794
0,4	0,29006	0,98545	−0,04138	0,07196	−0,01098	−0,17623	0,00999	0,11295	−0,00861	0,16373	−0,00897	−0,01417	−0,00469	0,01792
0,5	0,39754	1,16924	−0,02162	0,34344	−0,02681	−0,11290	0,01431	−0,04418	0,01543	0,26096	0,00163	0,23878	0,00359	0,13489
0,6	0,52459	1,37176	0,03154	0,74028	−0,02652	0,16013	0,00148	−0,18623	0,03138	−0,00721	0,03213	0,27065	0,02559	0,29885
0,7	0,67019	1,51591	0,13002	1,23957	0,01431	0,70108	−0,01163	0,00899	0,01074	−0,35542	0,03404	−0,29881	0,03976	−0,14383
0,8	0,81473	1,23281	0,27961	1,64530	0,12240	1,40728	0,02605	0,79018	−0,01081	0,07315	−0,01224	−0,45145	−0,00491	−0,62763
0,9	0,84409	−1,47379	0,41238	0,52815	0,26417	1,11431	0,14018	1,34013	0,05264	1,26089	0	1,00209	−0,02000	0,78392
0,95	0,66024	−6,76860	0,37094	−2,84771	0,26770	−1,50189	0,17553	−0,37789	0,10393	0,40961	0,05474	0,87276	0,03231	1,03902
1,0	0	−22,69575	0	−14,35728	0	−11,34479	0	−8,59864	0	−6,40156	0	−4,83322	0	−4,08329

Fortsetzung von Zahlentafel 1.

x	f_0	f'_0	f_1	f'_1	f_2	f'_2	f_3	f'_3	f_4	f'_4	f_5	f'_5
						$a = 1,25$						
	$\lambda_0 = 3,8386$		$\lambda_1 = 6,4443$		$\lambda_2 = 9,5412$		$\lambda_3 = 12,6569$		$\lambda_4 = 15,7816$		$\lambda_5 = 18,9116$	
0	0	0,42667	0	— 0,04587	0	0,08261	0	— 0,03929	0	0,04994	0	0,00346
0,1	0,04537	0,48218	— 0,00722	— 0,09289	0,00636	0,04159	— 0,00547	— 0,05404	0,00216	— 0,01351	— 0,00118	— 0,01801
0,2	0,09675	0,54710	— 0,01726	— 0,10081	0,00772	— 0,01717	— 0,00802	0,01180	— 0,00273	— 0,07529	— 0,00269	— 0,01483
0,3	0,15512	0,62205	— 0,02390	— 0,05371	0,00415	— 0,07445	— 0,00137	0,09298	— 0,00781	— 0,02450	— 0,00336	— 0,01860
0,4	0,22145	0,70561	— 0,02672	0,04866	— 0,00691	— 0,10651	0,00712	0,08978	— 0,00476	0,12168	— 0,00487	0,03868
0,5	0,29630	0,79012	— 0,01378	0,22136	— 0,01598	— 0,05783	0,01162	— 0,01220	0,01117	0,18033	0,00482	0,13012
0,6	0,37870	0,84964	0,01980	0,45783	— 0,01422	0,11463	0,00476	— 0,11102	0,02288	— 0,00308	0,02309	0,06871
0,7	0,46281	0,80140	0,07853	0,71463	0,01137	0,41723	— 0,00403	— 0,01446	0,00956	— 0,22964	0,01967	— 0,20635
0,8	0,52675	0,36580	0,15790	0,81467	0,06970	0,72240	0,01215	0,37614	— 0,00799	— 0,01570	— 0,00834	— 0,23127
0,9	0,48980	— 1,55491	0,21300	— 0,01391	0,13523	0,33934	0,06570	0,53010	0,02035	0,53055	0	0,44989
0,95	0,35185	— 4,32099	0,17675	— 1,70130	0,12562	— 0,96224	0,07674	— 0,29851	0,04170	0,13759	0,02404	0,32888
1,0	0	— 10,66667	0	— 6,11610	0	— 4,75419	0	— 3,42814	0	— 2,50287	0	— 1,98821
						$a = 1,40$						
	$\lambda_0 = 3,3052$		$\lambda_1 = 6,3805$		$\lambda_2 = 9,4927$		$\lambda_3 = 12,6183$		$\lambda_4 = 15,7499$			
0	0	0,28345	0	— 0,01124	0	0,04983	0	— 0,02980	0	0,01003		
0,1	0,02959	0,30850	— 0,00274	— 0,04099	0,00364	0,02133	— 0,00365	— 0,03674	— 0,00029	— 0,01926		
0,2	0,06173	0,33436	— 0,00747	— 0,04791	0,00411	— 0,01053	— 0,00549	0,00787	— 0,00317	— 0,03002		
0,3	0,09642	0,35896	— 0,01157	— 0,02847	0,00150	— 0,03911	— 0,00193	0,06045	— 0,00462	0,01086		
0,4	0,13333	0,37778	— 0,01213	0,02194	— 0,00304	— 0,06092	0,00496	0,05154	0	0,06524		
0,5	0,17147	0,38104	— 0,00621	0,10075	— 0,00669	— 0,01814	0,00891	0,00520	0,00899	0,08254		
0,6	0,20833	0,34722	0,00862	0,19678	— 0,00488	0,05945	0,00577	— 0,06470	0,01277	— 0,02445		
0,7	0,23810	0,22676	0,03274	0,27764	0,00654	0,17243	— 0,00032	— 0,04632	0,00423	— 0,12723		
0,8	0,24691	— 0,10288	0,06098	0,25599	0,02834	0,24472	0,00084	0,09658	— 0,00442	— 0,02879		
0,9	0,20000	— 0,97778	0,07256	— 0,11832	0,04624	0,03183	0,01585	0,15113	0,00176	0,16766		
0,95	0,13032	— 1,88996	0,05854	— 0,62822	0,04240	— 0,36937	0,02249	— 0,06654	0,01232	0,07593		
1,0	0	— 3,47222	0	— 1,67012	0	— 1,27928	0	— 0,78664	0	— 0,74406		

Fortsetzung von Zahlentafel 1.

x	f_0	f_0'	f_1	f_1'	f_2	f_2'	f_3	f_3'	f_4	f_4'
					$a = 1{,}60$					
	$\lambda_0 = 3{,}2472$		$\lambda_1 = 6{,}3423$		$\lambda_2 = 9{,}4652$		$\lambda_3 = 12{,}597$		$\lambda_4 = 15{,}7326$	
0	0	0,17756	0	0,00007	0	0,03145	0	— 0,01381	0	— 0,00292
0,1	0,01818	0,18586	— 0,00104	— 0,01898	0,00219	0,01215	— 0,00208	— 0,02134	— 0,00100	— 0,01584
0,2	0,03711	0,19216	— 0,00337	— 0,02533	0,00242	— 0,00751	— 0,00314	0,00385	— 0,00240	— 0,00828
0,3	0,05648	0,19448	— 0,00561	— 0,01693	0,00082	— 0,02309	— 0,00116	0,03350	— 0,00199	0,01818
0,4	0,07576	0,18939	— 0,00625	0,00644	— 0,00182	— 0,02758	0,00256	0,03393	0,00105	0,03835
0,5	0,09391	0,17075	— 0,00392	0,04189	— 0,00403	— 0,01320	0,00438	— 0,00243	0,00437	0,02045
0,6	0,10909	0,12727	0,00227	0,08153	— 0,00376	0,02170	0,00187	— 0,04436	0,00387	— 0,03339
0,7	0,11784	0,03741	0,01196	0,10812	0,00068	0,06721	— 0,00293	— 0,04039	— 0,00150	— 0,06310
0,8	0,11364	— 0,14305	0,02231	0,08597	0,00894	0,08890	— 0,00401	0,02607	— 0,00575	— 0,00686
0,9	0,08349	— 0,50358	0,02508	— 0,06195	0,01502	0,00380	0,00163	0,06723	— 0,00173	0,07409
0,95	0,05110	— 0,81102	0,01810	— 0,23182	0,01222	— 0,13113	0,00378	0,00458	0,00143	0,03984
1,0	0	— 1,26263	0	— 0,51556	0	— 0,40085	0	— 0,20469	0	— 0,14808
					$a = 2{,}0$					
	$\lambda_0 = 3{,}1966$		$\lambda_1 = 6{,}3123$		$\lambda_2 = 9{,}4444$		$\lambda_3 = 12{,}5812$		$\lambda_4 = 15{,}7199$	
0	0	0,08333	0	0,00468	0	0,01440	0	0,00521	0	0,01295
0,1	0,00831	0,08262	— 0,00004	— 0,00470	0,00094	0,00456	— 0,00001	— 0,00187	0,00062	0,00120
0,2	0,01646	0,08002	— 0,00018	— 0,00863	0,00096	— 0,00370	— 0,00012	— 0,00061	0,00030	— 0,00761
0,3	0,02422	0,07463	— 0,00157	— 0,00667	0,00030	— 0,00889	— 0,00008	0,00193	— 0,00054	— 0,00645
0,4	0,03125	0,06510	— 0,00191	0,00067	— 0,00065	— 0,00702	0,00015	0,00409	— 0,00066	0,00672
0,5	0,03704	0,04938	— 0,00131	0,01170	— 0,00132	— 0,00326	0,00018	— 0,00181	0,00018	0,01010
0,6	0,04082	0,02430	0,00044	0,02300	— 0,00112	0,00795	— 0,00015	— 0,00372	0,00085	0,00140
0,7	0,04142	— 0,01517	0,00311	0,02876	0,00030	0,01986	— 0,00028	0,00255	0,00040	— 0,00862
0,8	0,03704	— 0,07716	0,00570	0,01966	0,00254	0,02277	0,00054	0,01421	— 0,00024	— 0,00047
0,9	0,02479	— 0,17531	0,00605	— 0,01943	0,00382	— 0,00324	0,00189	0,00738	0,00046	0,01130
0,95	0,01436	— 0,24475	0,00419	— 0,05747	0,00294	— 0,03503	0,00178	— 0,01519	0,00083	— 0,00010
1,0	0	— 0,33333	0	— 0,11359	0	— 0,08618	0	— 0,06023	0	— 0,03839

des Druckpunktes, dessen Lage aus Gleichgewichtsgründen mit der des Angriffspunktes der Last zusammenfallen muß, nach dem Momentensatze zu

$$l_r = \frac{1}{m_g \cdot b} \int_0^1 \int_0^b \left(x \cdot p \Big/ \frac{6\,\eta\, U}{\delta^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

bestimmen, worin m_g aus Gl. (15) zu entnehmen ist.

Die zwischen einem Gleitschuh und einer Gleitbahn auftretende Reibung wird aus der Schubspannungsverteilung an der Gleitbahn nach dem bekannten Ansatz

$$\tau = -\eta \frac{U}{h} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{h}{2} \;{}^{4)} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

erhalten. Die Umformung mit der Spaltbeziehung des ebenen Gleitschuhes Gl. (4) lautet dann

$$\tau = -\eta \frac{U}{(a-x)\,\delta} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{(a-x)\,\delta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad 17\text{a}).$$

Den noch unbekannten Druckgradienten $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ liefert die Differentiation der Druckgleichung (14) mit

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{6\,\eta\,U}{\delta^2}\left\{\left(1 - \frac{\operatorname{Cos}\lambda_0 z}{\operatorname{Cos}\lambda_0 b}\right) f_0'(x) + \left(\frac{\operatorname{Cos}\lambda_0 z}{\operatorname{Cos}\lambda_0 b} - \frac{\operatorname{Cos}\lambda_1 z}{\operatorname{Cos}\lambda_1 b}\right) f_1'(x) + \cdots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

worin die zugehörigen f_0'-Werte mit der differenzierten Gl. (8) $f_0' = \frac{6\,\eta\,U}{\delta^2} \cdot \frac{a + x - 2\,a\,x}{(2\,a-1)\,(a-x)^3}$ errechnet und in der Zahlentafel 1 zu finden sind. Ebenso wurden die übrigen f_n'-Werte vermittels $f_n' = f_{n-1}' - g_{n-1}'$, die die Differentiation der früher angewandten Beziehung $f_n = f_{n-1} - g_{n-1}$ darstellt, gefunden und eingetragen. Dazu war g_{n-1}' mit den bekannten Differentialformeln der Besselschen Funktionen Gl. (10) zu bestimmen, die für den vorliegenden Fall umgeformt lauten

$$g_{n-1}' = A_{n-1}\left[\frac{2\,J_1\{\lambda_{n-1}(a-x)\}}{(a-x)^2} - \frac{\lambda_{n-1}}{a-x} J_0\{\lambda_{n-1}(a-x)\}\right]$$
$$+ B_{n-1}\left[\frac{2\,N_1\{\lambda_{n-1}(a-x)\}}{(a-x)^2} - \frac{\lambda_{n-1}}{a-x} N_0\{\lambda_{n-1}(a-x)\}\right].$$

Mit der Abkürzung $F(x, z)$ für den geschweiften Klammerausdruck in Gl. (18) heißt diese $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{6\,\eta\,U}{\delta^2} \cdot F(x, z)$. Die Gl. (17 a) schreibt sich damit

$$\tau = -\frac{\eta\,U}{\delta}\left\{\frac{1}{a-x} + 3 \cdot F(x, z) \cdot (a-x)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (19\text{a})$$

und nach Elimination von δ mit Gl. (15)

$$\frac{\tau}{\sqrt{\eta\,U\,p_r}} = -\frac{\frac{1}{a-x} + 3 \cdot F(x, z) \cdot (a-x)}{\sqrt{6\,m_g}} \quad . \quad . \quad . \quad (19\text{b}).$$

Die mittlere Schubspannung τ_r, die wegen der eingeführten neuen Maßeinheit $l = 1$ (Bild 1) gleichzeitig die Reibungskraft pro Breiteneinheit darstellt, wird nun durch Integration der Gl. (19) und Division mit der Gleitschuhfläche (zahlenmäßig gleich der Gleitschuhbreite $B = 2\,b$) erhalten zu

$$\frac{\tau_r}{\eta\,U/\delta} = -\frac{1}{b}\int_0^1\int_0^b \left\{\frac{1}{a-x} + 3\,F(x, z) \cdot (a-x)\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \quad . \quad . \quad . \quad (20\text{a})$$

oder

$$\frac{\tau_r}{\sqrt{\eta\,U\,p_r}} = \frac{-1}{b\sqrt{6\,m_g}}\int_0^1\int_0^b \left\{\frac{1}{a-x} + 3\,F(x, z) \cdot (a-x)\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \quad . \quad . \quad . \quad (20\text{b}).$$

Die rechte Seite von Gl. (20 a) und (20 b) enthält nur Abmessungen des Gleitschuhes und die Gleitschuhstellung a. Sie ist daher für einen gegebenen Gleitschuh mit vorgeschriebener Stellung a konstant. Die Veränderung der mittleren Schubspannung τ_r hängt somit von der Zähigkeit des Schmiermittels η, der Gleitbahngeschwindigkeit U, dem Winkel δ oder dem äußeren Belastungsdruck p_r ab.

c) Der ballige Schmierkeil. Der ballige Schmierkeil unterscheidet sich vom ebenen durch die gekrümmte Gleitfläche des Gleitschuhes (Bild 3). Die theoretische Entwicklung des hydrodynamischen Schmierungsvorganges folgt im Prinzip der früheren. Trotzdem erscheint es angebracht, wegen des andersgearteten Charakters des Spaltverlaufes die Herleitung der benötigten Funktionen durchzuführen und zahlenmäßig für die spätere Verwendung vorzubereiten. Bild 3 zeigt einen Schnitt durch die Längsachse des Gleitsystems. Die Arbeitsweise ist wie beim ebenen Gleitsystem.

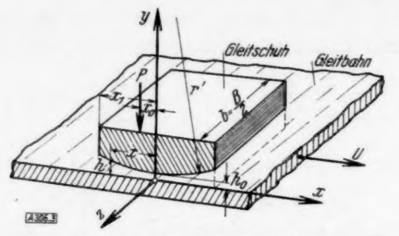


Bild 3. Schematische Darstellung des balligen Gleitsystems.

Die charakteristische Größe dieses Schmierkeils ist der engste Spalt h_0, Bild 3, dessen Lage durch die vom Mittelpunkt des Gleitschuhkreises aus auf die Gleitbahn gefällte Normale gegeben ist. Der Schnittpunkt dieser Normalen mit der Gleitbahn wird als Ursprung des x, y, z-Koordinatensystems gewählt. Als Spalt kann der senkrecht zur Gleitbahn gemessene Abstand zwischen Gleitbahn und Gleitschuh genommen werden, solange $x_1 \ll r'$ ist (vgl. Bild 3). Die Spaltbeziehung lautet dann $h = h_0 + r' - \sqrt{r'^2 - x^2}$ (21) und bei Vernachlässigung der höheren Glieder einer Reihenentwicklung

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2\,r'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Mit diesem Spaltverlauf erhält die allgemeine Differentialgleichung (3) die Form

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{6\,x}{\left(1+\frac{x^2}{2\,r'\,h_0}\right) 2\,r'\,h_0}\,\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{12\,\eta\,U\,x}{\left(1+\frac{x^2}{2\,r'\,h_0}\right)^3 h_0^2 \cdot 2\,r'\,h_0} = 0 \quad \ldots \quad (23).$$

Hierin ist wie früher z die Koordinate in der Breitenrichtung mit dem Ursprung in der Mitte.

Für die weitere Auswertung ist es vorteilhaft, die dimensionslosen Größen

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{2\,r'\,h_0}} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{z}{\sqrt{2\,r'\,h_0}}$$

einzuführen und damit Gl. (23) umzuschreiben in

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{6\,\xi}{1+\xi^2}\,\frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{12\,\eta\,U\,\xi}{(1+\xi^2)^3} \cdot \frac{\sqrt{2\,r'\,h_0}}{h_0^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Die Benutzung der gleichen Ansatzform für p wie bei Gl. (6)

$$p = \left(1 - \frac{\operatorname{Cos}\mu_0\,\zeta}{\operatorname{Cos}\mu_0\,\zeta_b}\right)\varphi_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Cos}\mu_{n-1}\,\zeta}{\operatorname{Cos}\mu_{n-1}\,\zeta_b} - \frac{\operatorname{Cos}\mu_n\,\zeta}{\operatorname{Cos}\mu_n\,\zeta_b}\right)\varphi_n(\xi) \quad \ldots \quad (25)$$

führt nach Einsetzen der erforderlichen Ableitungen in Gl. (24) auf ähnliche gewöhnliche Differentialgleichungen wie für den ebenen Gleitschuh, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \varphi_0'' + \frac{6\,\xi}{1+\xi^2}\,\varphi_0' - \frac{12\,\eta\,U}{h_0^2}\sqrt{2\,r'\cdot h_0}\,\frac{\xi}{(1+\xi^2)^3} = 0,\\
&\text{b)}\quad \frac{\operatorname{Cos}\mu_0\,\zeta}{\operatorname{Cos}\mu_0\,\zeta_b}\left(\varphi_1'' + \frac{6\,\xi}{1+\xi^2}\,\varphi_1' + \mu_0^2\,\varphi_1 - \varphi_0'' - \frac{6\,\xi}{1+\xi^2}\,\varphi_0' - \mu_0^2\,\varphi_0\right) = 0,\\
&\text{c)}\quad \frac{\operatorname{Cos}\mu_1\,\zeta}{\operatorname{Cos}\mu_1\,\zeta_b}\left(\varphi_2'' + \frac{6\,\xi}{1+\xi^2}\,\varphi_2' + \cdots\cdots\cdots\right) = 0,\\
&\text{allgemein geschrieben}\\
&\frac{\operatorname{Cos}\mu_{n-1}\,\zeta}{\operatorname{Cos}\mu_{n-1}\,\zeta_b}\left(\varphi_n'' + \frac{6\,\xi}{1+\xi^2}\,\varphi_n' + \mu_{n-1}^2\,\varphi_n - \varphi_{n-1}'' - \frac{6\,\xi}{1+\xi^2}\,\varphi_{n-1}' - \mu_{n-1}^2\,\varphi_{n-1}\right) = 0\\
&\qquad\qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26),$$

worin ζ_b die durch $\sqrt{2\,r'\,h_0}$ dimensionslos gemachte halbe Breite $B/2$ des Gleitschuhes bedeutet. Zur Unterscheidung ist hier für die noch unbekannte Funktion statt f nun φ geschrieben. Die Grenzbedingungen für die beiden Seitenkanten $\zeta = \pm\,\zeta_b$ des Schmierspaltes sind wieder p = Außendruck = Null. Sie werden schon durch die Klammerausdrücke der Gl. (25) befriedigt.

Die Lösung der Differentialgleichung (26a) lautet

$$\varphi_0 = \frac{\eta U \sqrt{2 r' h_0}}{h_0^2}\left\{\frac{3}{4}\frac{\xi(\xi^2-1)}{(1+\xi^2)^2}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\xi + c_1\left[\frac{1}{8}\frac{\xi(3\xi^2+5)}{(1+\xi^2)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}\xi\right]+c_2\right\} \quad . \quad . \quad (27).$$

Sie gibt die Druckverteilung des zweidimensionalen Strömungsvorganges für den unendlich breiten balligen Gleitschuh an, die an der Eintrittskante ξ_1 mit der Grenzbedingung φ_0 = Außendruck $= 0$ beginnt, deren Ende aber wegen der hinter der engsten Spaltstelle folgenden Erweiterung nicht durch das Gleitschuhende festgelegt, sondern durch den Strömungszustand in diesem Spaltteil gegeben ist. Wie mehrfache Versuche zeigten, können Unterdrücke in dem erweiterten Schmierspalt durch das Vorhandensein von Luft oder Gasen in allen gebräuchlichen Schmiermitteln nicht dauernd bestehen[2), 6)]. Schon nach kurzer Betriebsdauer zerfällt der anfängliche Unterdruck, und der Außendruck wandert von der Hinterkante des Gleitschuhes aus bis an den hinteren Rand der Überdruckzone vor. Dadurch ist aber nach W. Stieber[7)] bedingt, daß die Druckkurve an dieser mit ξ_2 bezeichneten Stelle mit horizontaler Tangente in die Abszisse einmünden und gleichzeitig beendigt sein muß, was bedeutet, daß nunmehr zwei weitere Grenzbedingungen $\frac{d\varphi_0}{d\xi}=0$ und $\varphi_0 = 0$ bei $\xi=\xi_2$ gegeben sind. ξ_2 liegt noch nicht fest, folglich können die drei aufgestellten Grenzbedingungen durch die Gl. (27) mit ihren zwei willkürlichen Konstanten erfüllt werden, wenn ξ_2 noch eine Funktion von ξ_1 ist, d. h. daß ξ_2 nur ganz bestimmte von ξ_1 abhängige Werte annehmen kann. Mit dieser Bedingung ist nun die vollkommene Klärung der wirksamen Gleitschuhfläche erreicht.

Die Differentiation der Gl. (27) liefert nun mit der Grenzbedingung $\frac{d\varphi_0}{d\xi}=0$ bei $\xi=\xi_2$ die Konstante $c_1 = -6\xi_2^2$. Die zweite Konstante c_2 wird erhalten, wenn Gl. (27) für die Grenzbedingung $\varphi_0 = 0$ bei $\xi=\xi_1$ angewandt wird. Damit lautet die Gleichung für die Druckverteilung

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0 = \frac{3}{4}\frac{\eta U}{h_0^2}\sqrt{2 r' h_0}\Bigg[&\frac{\xi^3(1-3\xi_2^2)-\xi(1+5\xi_2^2)}{(1+\xi^2)^2}-\frac{\xi_1^3(1-3\xi_2^2)-\xi_1(1+5\xi_2^2)}{(1+\xi_1^2)^2}\\ &+(1-3\xi_2^2)(\operatorname{arctg}\xi-\operatorname{arctg}\xi_1)\Bigg]\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (28).$$

Da nach Obigem auch bei $\xi=\xi_2$ $\varphi_0 = 0$ sein muß, liefert der eckige Klammerausdruck von Gl. (28) die zur Bestimmung von ξ_2 benötigte Beziehung

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\xi_2^3(1-3\xi_2^2)-\xi_2(1+5\xi_2^2)}{(1+\xi_2^2)^2}-\frac{\xi_1^3(1-3\xi_2^2)-\xi_1(1+5\xi_2^2)}{(1+\xi_1^2)^2}\\ &\qquad+(1-3\xi_2^2)(\operatorname{arctg}\xi_2-\operatorname{arctg}\xi_1)=0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

In der Zahlentafel 2 ist die Abhängigkeit ξ_2 von ξ_1 dargestellt.

Zahlentafel 2. Werte von ξ_2 in Abhängigkeit von ξ_1.

ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
— 1,0	0,35787	— 2,4	0,45559	— 6,0	0,47355
— 1,2	0,38794	— 2,8	0,46203	— 7,0	0,47413
— 1,4	0,40944	— 3,2	0,46593	— 8,0	0,47445
— 1,6	0,42510	— 3,6	0,46842	— 10,0	0,47478
— 1,8	0,43640	— 4,0	0,47012	— ∞	0,47513
— 2,0	0,44470	— 5,0	0,47246		

Bei den übrigen in Gl. (26) dargestellten Differentialgleichungen erfolgt das geforderte Verschwinden der linken Seiten durch Nullsetzen der Klammerausdrücke. Dafür werden wieder wie früher Lösungen mit der Ansatzform

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} - \omega_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

in Anwendung gebracht, die mit ihren Ableitungen die Ausgangsdifferentialgleichungen (26b, c) usw. in die folgenden

$$\omega''_{n-1} + \frac{6\xi}{1+\xi^2}\omega'_{n-1} + \mu^2_{n-1}\omega_{n-1} = 0 \quad . \quad . \quad n = 1, 2, 3 \cdots \quad . \quad . \quad (31)$$

verwandeln.

6) W. Frössel: Forsch. Ing.-Wes. Bd. Nr. 6 (1938), S. 261 bis 278.

7) W. Stieber: Das Schwimmlager, Hydrodynamische Theorie des Gleitlagers. Berlin 1933.

An den durch die Gl. (29) festgelegten wirksamen Gleitschuhgrenzen ξ_1 und ξ_2[8]) muß jedes Glied der Gl. (25) für sich Null werden, wenn ihre ganze rechte Seite verschwinden soll. Das kann aber nur erreicht werden, wenn jedes einzelne Glied der Funktion $\varphi_n = \varphi_{n-1} - \omega_{n-1}$ verschwindet. Damit hat die homogene Differentialgleichung (31) zwei homogene Randbedingungen zu erfüllen, die bekanntlich stets auf Lösungen von Eigenfunktionen mit den Eigenwerten μ_i führen. Die dritte Randbedingung, die einen tangentiellen Einlauf der Druckkurve in die Abszisse bei $\xi = \xi_2$ verlangt, kann durch die obige Differentialgleichung nicht mehr erfüllt werden. Hierzu wäre eine weitere von μ_i unabhängige Konstante erforderlich, die auch in dem Ansatz Gl. (25) zum Ausdruck kommen müßte. Damit würden aber die Lösungsschwierigkeiten stark anwachsen und die aufzuwendende Arbeit für eine Lösung ungeheuer vermehrt werden, obwohl die erreichte Verbesserung selbst bei schmalen Gleitschuhen kaum merklich sein dürfte. Aus diesem Grunde blieb die Nichterfüllung der dritten Randbedingung bei der folgenden Auswertung unbeachtet.

Die Auffindung einer allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (31) ist mit Schwierigkeiten verbunden, deshalb wird eine numerische Auswertung nach dem bekannten Runge-Kutta-Verfahren vorgenommen, was zwangsläufig eine Einschränkung der Lösungen auf bestimmte ausgewählte Grenzen ξ_1 zur Folge hat. Von den drei Konstanten einer aus der Differentialgleichung (31) hervorgegangenen Lösung kann wegen der schon erwähnten homogenen Randbedingungen die eine als Faktor herausgezogen werden und zunächst bei der numerischen Rechnung unberücksichtigt bleiben. Die zweite wird durch den Anfangswert der nach dem angegebenen Verfahren errechneten Kurve bei ξ_1 ohne weiteres Zutun festgelegt. Dagegen ist die Ermittlung der dritten, die den Eigenwert μ_i darstellt, durch die an einer anderen Stelle bei ξ_2 vorgeschriebene Randbedingung sehr erschwert. Dieser Wert kann nur durch Probieren gefunden werden, was eine mehrmalige Errechnung der Kurve von einer Grenze bis zur anderen erforderlich macht. Aus zwei dem vorgeschriebenen Randwert dicht benachbarten Kurven wird dann die gesuchte Funktion sowie der zugehörige μ_i-Wert durch Interpolation oder Extrapolation bestimmt. Das Bild 4 zeigt vier Muster für die Bestimmung der Funktionen $\frac{\omega_{n-1}}{a_{n-1}}$ und der μ_i-Werte bei den gegebenen Grenzen $\xi_1 = -2$ und $\xi_2 = 0{,}44470$. Wie leicht erkennbar ist, müssen die Rechenschritte des angewandten Verfahrens aus Genauigkeitsgründen mit steigenden μ_i-Werten immer kleiner werden, wodurch die aufzuwendende Arbeit beträchtlich erhöht wird. Zu jedem errechneten Punkt ergibt sich aus der Rechnung gleichzeitig die Richtungstangente der Kurve an dieser Stelle.

Bild 4. Lösungskurven der Differentialgleichung (31) zur Bestimmung der μ_i-Werte.

Das angewandte Runge-Kutta-Verfahren[9]) zur numerischen Bestimmung der Funktionen verlangt die Aufteilung der gegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung (Gl. (31)) in zwei erster Ordnung. Dazu kann allgemein, wenn keine bessere Aufteilung möglich ist, gesetzt werden

$$\psi_1 = \omega' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32\text{a})$$

und damit nach Gl. (31)

$$\psi_2 = \psi_1' = -\frac{6\,\xi}{1+\xi^2}\,\psi_1 - \mu^2\,\omega \quad . \quad . \quad (32\text{b}),$$

worin ψ wieder eine Funktion von ξ ist.

[8]) Die Größe ξ_2 ist nach der genannten Beziehung auf der ganzen Gleitschuhbreite konstant, was streng genommen für den endlich breiten Gleitschuh nicht mehr genau zutrifft. Für diesen müßte die wirksame Gleitfläche am Ende durch eine Randkurve begrenzt sein, also ξ_2 erneut als Veränderliche von ζ angesehen werden, auf der die Grenzbedingungen $p=0$ und $\frac{\partial p}{\partial n}=0$ erfüllt sind, wobei $\frac{\partial p}{\partial n}$ den Differentialquotienten nach der Kurvennormale darstellt. Die unüberwindlich erscheinenden Schwierigkeiten, die einer solchen Lösung entgegenstehen, zwingen aber dazu, die erste vereinfachte Annahme beizubehalten.

Zur Ausführung des Verfahrens wurden die bekannten Formeln vierter Ordnung benutzt. Gegeben ist der Anfangswert der erwarteten Kurve $\omega = 0$ bei $\xi_1 = -2$. Ihre Steigung kann an dieser Stelle wegen der Homogenität der gegebenen Differentialgleichung (31) und der homogenen Grenzbedingungen beliebig gewählt werden und ist mit $\psi_1 = 1$ angesetzt worden. Der Sprung h wurde zu 0,2 und μ_0^2 probeweise zu 4,13 angenommen. Die fertiggerechnete Kurve ist in Bild 4 eingezeichnet. Sie trifft die x-Achse noch nicht in dem gewünschten Punkt ξ_2, so daß eine weitere Kurve mit einem besseren μ_0-Wert zu rechnen ist. Genügt auch diese noch nicht den Anforderungen, so wird aus beiden durch Interpolation die richtige ermittelt. Ebenso wird bei der Ermittlung der höheren Funktionen verfahren, die durch höhere μ_i-Werte gekennzeichnet sind und deren Kurven die x-Achse in dem betrachteten Gebiet ein- oder mehrmalig schneiden (Bild 4).

Die Genauigkeit des angewandten numerischen Verfahrens hängt von der gewählten Sprunggröße h und von der Krümmung der gesuchten Kurve ab. Die Fehlerabschätzung kann nach der bekannten Art erfolgen, nach der an der zu prüfenden Kurvenstelle eine zweimalige Durchrechnung des Verfahrens notwendig ist und zwar 1. in zwei Schritten mit dem Sprung h und 2. in einem Schritt mit dem Sprung $2h$. Der Fehler zwischen der mit dem Sprung h gefundenen numerischen und der genauen Kurve beträgt dann näherungsweise $^1/_{15}$ der Differenz der beiden Ergebnisse. Eine bequeme und ständige Überprüfung der Genauigkeit sowie eine Kontrolle für Rechenfehler liefert während des Rechnens der dauernde Vergleich des letzten Zwischenwertes $\omega + k^{(3)}$ mit dem in seiner Spalte folgenden Hauptwerte $\omega + \Delta\omega$, die schon beide annähernd gleich sein müssen, wenn der Sprung h richtig gewählt wurde. Plötzlich auftretende größere Differenzen zwischen diesen beiden Werten lassen gewöhnlich auf einen Rechenfehler schließen. Aber auch bei stark anwachsenden Kurvenkrümmungen können im Laufe der Rechnung steigende Unterschiede auftreten, die dann eine Verkleinerung des Sprunges h erforderlich machen. Da jeder Schritt eine in sich abgeschlossene Rechnung darstellt, ist eine beliebige Sprungänderung nach jedem Schritt möglich.

Die weitere Aufgabe ist nun nach der anfangs gemachten Ansatzform (Gl. (30)) aus jeder vorhergehenden Funktion, angefangen mit φ_0 (Gl. (28)), durch Hinzufügen einer geeigneten anderen nacheinander neue Funktionen $\varphi_1 = \varphi_0 - \omega_0$, $\varphi_2 = \varphi_1 - \omega_1 \ldots\ldots \varphi_n = \varphi_{n-1} - \omega_{n-1}$ zu finden, deren Funktionswerte mit steigenden Indizes in dem ganzen Bereich zwischen ξ_1 und ξ_2 immer mehr gegen Null gehen. Zu diesem Zweck sind die schon bekannten Funktionen $\frac{\omega_{n-1}}{a_{n-1}}$ vorbereitet, deren Grundkurven durch Multiplizieren mit der bisher noch beliebig verfügbaren Konstanten a_{n-1} entsprechend umgeformt werden können. Als Beispiel zeigt Bild 5 die Entwicklung der aufeinander folgenden Funktionen für $\xi_1 = -2$. Da eine derartige Rechnung einen beträchtlichen Arbeitsaufwand erforderlich macht, sind zur Erleichterung der praktischen Anwendung auch die Funktionen für $\xi_1 = -1$; -2; -4 und -6 ermittelt und in der Zahlentafel 3 zusammengestellt. Der in Gl. (28) auftretende Ausdruck $\frac{3}{4}\frac{\eta U}{h_0^2}\sqrt{2\,r'\,h_0}$ ist bei der bisherigen Entwicklung herausgezogen worden und kann nun bei der endgültigen Aufstellung der Druckgleichung als Faktor zugesetzt werden. Damit wird

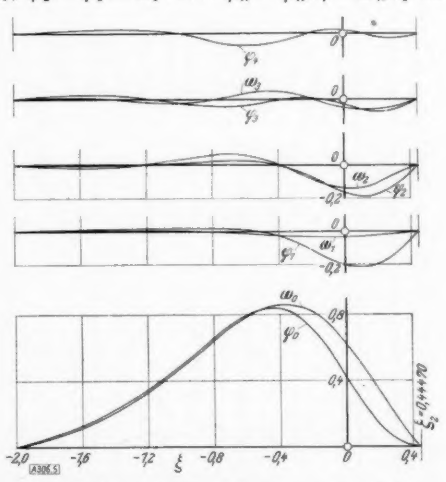


Bild 5. Verlauf der Funktionen φ_i und ω_i beim balligen Gleitschuh ($\xi_1 = -2$).

$$p\bigg/\frac{3}{4}\frac{\eta U}{h_0^2}\sqrt{2\,r'\,h_0} = \left(1 - \frac{\operatorname{Cos}\mu_0\zeta}{\operatorname{Cos}\mu_0\zeta_b}\right)\varphi_0(\xi) + \sum_{n=1}\left(\frac{\operatorname{Cos}\mu_{n-1}\zeta}{\operatorname{Cos}\mu_{n-1}\zeta_b} - \frac{\operatorname{Cos}\mu_n\zeta}{\operatorname{Cos}\mu_n\zeta_b}\right)\varphi_n(\xi) \quad . \quad (33),$$

worin ζ_b die halbe dimensionslose Gleitschuhbreite bedeutet. Aus der nun gegebenen Druckverteilung folgt durch Integration die Tragkraft des Gleitschuhes, die zweckmäßig auf die Einheit der Gleitschuhbreite bezogen, dann die Tragkraft pro Breiteneinheit P' in der dimensionslosen Form

$$P'\bigg/\frac{3}{2}\frac{\eta U}{h_0}\,r' = \frac{1}{\zeta_b}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_0^{\zeta_b}\left(p\bigg/\frac{3}{4}\frac{\eta U}{h_0^2}\sqrt{2\,r'\,h_0}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta = m_b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

liefert.

[9]) Runge und König: Numerisches Rechnen. Berlin 1924. — Schultz: Formelsammlung zur praktischen Mathematik, Leipzig und Berlin, Göschen, Bd. 1110 (1937). Ein anderes Verfahren, das die Zerlegung der Differentialgleichung 2. Ordnung in zwei 1. Ordnung umgeht, ist von Zurmühl angegeben. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 104.

Zahlentafel 3. Werte der Funktionen φ_0, φ_0'; φ_1, φ_1'; φ_2, φ_2'; φ_3, φ_3'; φ_4, φ_4'; φ_5, φ_5'.

$\xi_1 = -1$; $\xi_2 = 0{,}35789$

ξ	φ_0	φ_0'	φ_1	φ_1'	φ_2	φ_2'	φ_3	φ_3'	φ_4	φ_4'
	$\mu_0 = 2{,}8768$		$\mu_1 = 4{,}9256$		$\mu_2 = 7{,}1527$		$\mu_3 = 9{,}4109$		$\mu_4 = 11{,}7312$	
−1,0	0	0,8719	0	0,4398	0	0,2094	0	0,2094	0	0,2004
−0,9	0,0896	0,9200	0,0399	0,3588	0,0141	0,0815	0,0141	0,0815	0,0052	0,0055
−0,8	0,1824	0,9285	0,0705	0,2494	0,0172	−0,0118	0,0172	−0,0118	0,0048	0,0034
−0,7	0,2733	0,8753	0,0888	0,1094	0,0134	−0,0574	0,0134	−0,0574	0,0084	0,0697
−0,6	0,3546	0,7376	0,0914	−0,0588	0,0072	−0,0528	0,0072	−0,0528	0,0169	0,0955
−0,5	0,4174	0,4994	0,0763	−0,2461	0,0039	−0,0170	0,0039	−0,0170	0,0237	0,0176
−0,4	0,4513	0,1636	0,0423	−0,4224	0,0039	0,0204	0,0039	0,0204	0,0183	−0,1196
−0,3	0,4480	−0,2352	−0,0065	−0,5491	0,0069	0,0219	0,0069	0,0219	0,0019	−0,2013
−0,2	0,4044	−0,6264	−0,0639	−0,5760	0,0068	−0,0274	0,0068	−0,0274	−0,0166	−0,1431
−0,1	0,3261	−0,9260	−0,1171	−0,4756	0,0002	−0,1178	0,0002	−0,1178	−0,0237	0,0081
0	0,2273	−1,0246	−0,1523	−0,2141	−0,0141	−0,1662	−0,0141	−0,1662	−0,0186	0,0845
0,1	0,1303	−0,9260	−0,1547	0,1317	−0,0280	−0,1430	−0,0280	−0,1430	−0,0095	0,0325
0,2	0,0501	−0,6264	−0,1232	0,5228	−0,0365	0,0219	−0,0365	0,0219	−0,0110	−0,0197
0,3	0,0065	−0,2352	−0,0539	0,8514	−0,0219	0,2842	−0,0219	0,2842	−0,0097	0,0835
0,35789	0	0	0	0,9935	0	0,4794	0	0,4794	0	0,2667

$\xi_1 = -2$; $\xi_2 = 0{,}4447$

ξ	φ_0	φ_0'	φ_1	φ_1'	φ_2	φ_2'	φ_3	φ_3'	φ_4	φ_4'
	$\mu_0 = 2{,}0175$		$\mu_1 = 2{,}9905$		$\mu_2 = 4{,}1497$		$\mu_3 = 5{,}3795$		$\mu_4 = 6{,}6735$	
−2,0	0	0,2434	0	0,0512	0	0,0423	0	0,0898	0	0,0582
−1,8	0,0559	0,3193	0,0076	0,0257	0,0054	0,0133	0,0163	0,0700	0,0096	0,0416
−1,6	0,1292	0,4189	0,0106	0,0079	0,0058	−0,0051	0,0257	0,0205	0,0171	−0,0051
−1,4	0,2251	0,5436	0,0111	0,0009	0,0041	−0,0076	0,0222	−0,0570	0,0224	0,0125
−1,2	0,3478	0,6841	0,0126	0,0101	0,0049	0,0132	0,0039	−0,1274	0,0195	−0,0580
−1,0	0,4974	0,8022	0,0161	0,0231	0,0109	0,0457	−0,0240	−0,1367	−0,0028	−0,1679
−0,8	0,6610	0,8021	0,0197	0,0036	0,0218	0,0513	−0,0436	−0,0442	−0,0427	−0,2126
−0,6	0,7991	0,5160	0,0109	−0,1116	0,0247	−0,0446	−0,0377	0,1010	−0,0743	−0,0671
−0,4	0,8385	−0,1935	−0,0204	−0,3419	0,0068	−0,2787	0,0018	0,1332	−0,0482	0,2084
−0,2	0,7057	−1,4579	−0,1106	−0,8559	−0,0745	−0,8349	0,0103	−0,4127	0,0016	−0,1005
0	0,4213	−1,5821	−0,2001	−0,2842	−0,1663	−0,3279	−0,0289	−0,2718	0,0220	−0,0617
0,2	0,1369	−1,1219	−0,1938	0,3906	−0,1735	0,3061	−0,0729	−0,0512	−0,0138	0,1942
0,4	0,0042	−0,1935	−0,0476	1,0186	−0,0443	0,9415	−0,0257	0,5104	−0,0138	0,2341
0,4447	0	0	0	1,1054	0	1,0351	0	0,6375	0	0,3825

Fortsetzung von Zahlentafel 3.

ξ	φ_0	φ'_0	φ_1	φ'_1	φ_2	φ'_2	φ_3	φ'_3	φ_4	φ'_4	φ_5	φ'_5
$\xi_1 = -4;\ \xi_2 = 0,47012$												
	$\mu_0 = 1,2974$		$\mu_1 = 1,9090$		$\mu_2 = 2,4706$		$\mu_3 = 3,0907$		$\mu_4 = 3,7764$		$\mu_5 = 4,5139$	
—4,0	0	0,0257	0	—0,0086	0	0,0097	0	0,0067	0	0,0096	0	0,0208
—3,6	0,0126	0,0375	—0,0052	—0,0177	0,0038	0,0077	0,0024	0,0043	0,0036	0,0066	0,0071	0,0115
—3,2	0,0312	0,0574	—0,0131	—0,0209	0,0056	—0,0002	0,0034	—0,0005	0,0045	0,0034	0,0058	—0,0155
—2,8	0,0593	0,0883	—0,0211	—0,0137	0,0018	—0,0172	0,0008	—0,0105	—0,0003	—0,0183	—0,0079	—0,0360
—2,4	0,1046	0,1435	—0,0213	0,0187	—0,0088	—0,0342	—0,0058	—0,0214	—0,0096	—0,0248	—0,0154	0,0073
—2,0	0,1796	0,2419	—0,0003	0,0972	—0,0235	—0,0330	—0,0153	—0,0225	—0,0174	—0,0085	—0,0020	0,0509
—1,6	0,3080	0,4149	0,0671	0,2560	—0,0281	0,0227	—0,0191	0,0125	—0,0264	0,0424	—0,0055	—0,0116
—1,2	0,5235	0,6717	0,2185	0,5152	0,0072	0,1698	0,0037	0,1135	0,0205	0,1209	—0,0147	—0,0806
—0,8	0,8268	0,7625	0,4685	0,6717	0,1064	0,2929	0,0685	0,1799	0,0723	0,0975	—0,0178	—0,1358
—0,4	0,9738	—0,3139	0,6216	—0,1514	0,1577	—0,1880	0,0746	—0,2685	0,0285	—0,4061	0,0782	0,2264
0	0,4922	—1,8781	0,2783	—1,3872	—0,0538	—0,7132	—0,1299	—0,5906	—0,1972	—0,5240	0,0278	—0,5579
0,4	0,0107	—0,3139	0,0162	0,0557	—0,0568	0,6756	—0,0671	0,8321	—0,0775	0,9888	—0,0323	0,3098
0,47012	0	0	0	0,3188	0	0,8546	0	0,9905	0	1,1280	0	0,5246
$\xi_1 = -6;\ \xi_2 = 0,47355$												
	$\mu_0 = 0,9168$		$\mu_1 = 1,4044$		$\mu_2 = 1,8397$		$\mu_3 = 2,2470$		$\mu_4 = 2,6871$		$\mu_5 = 3,1091$	
—6,0	0	0,0056	0	—0,0026	0	0,0034	0	—0,0009	0	0,0032	0	0,0063
—5,4	0,0042	0,0084	—0,0023	—0,0050	0,0021	0,0031	—0,0008	—0,0013	0,0017	0,0014	0,0032	0,0023
—4,8	0,0105	0,0131	—0,0056	—0,0057	0,0030	—0,0008	—0,0009	0,0012	0,0008	—0,0046	0,0008	0,0103
—4,2	0,0206	0,0215	—0,0084	—0,0025	0,0004	—0,0083	0,0007	0,0037	—0,0030	—0,0067	—0,0060	—0,0090
—3,6	0,0378	0,0374	—0,0070	0,0091	—0,0071	—0,0159	0,0022	—0,0002	—0,0048	0,0031	—0,0049	0,0151
—3,0	0,0691	0,0702	0,0063	0,0389	—0,0162	—0,0120	—0,0012	—0,0133	0,0019	0,0176	—0,0054	0,0257
—2,4	0,1299	0,1434	0,0478	0,1107	—0,0138	0,0312	—0,0124	—0,0185	0,0120	0,0120	0,0105	—0,0201
—1,8	0,2605	0,3165	0,1589	0,2849	0,0413	0,1786	—0,0103	0,0464	0,0109	—0,0156	—0,0161	—0,0647
—1,5	0,3774	0,4721	0,2667	0,4429	0,1156	0,3269	0,0168	0,1441	0,0057	—0,0163	—0,0304	—0,0184
—1,2	0,5482	0,6695	0,4294	0,6462	0,2427	0,5278	0,0817	0,2970	0,0035	0,0064	—0,0184	0,1139
—0,9	0,7724	0,7915	0,6486	0,7840	0,4286	0,6867	0,1940	0,4362	0,0087	0,0201	0,0805	0,2914
—0,6	0,9754	0,4317	0,8543	0,4628	0,6152	0,4469	0,3138	0,2820	—0,0012	—0,0765	0,1325	0,3094
—0,3	0,9351	—0,8294	0,8332	—0,7291	0,6138	—0,6680	0,3006	—0,4486	—0,0920	—0,4893	0,1413	—0,2909
0	0,5024	—1,7940	0,4399	—1,6411	0,2972	—1,3112	0,0741	—1,7676	—0,2388	—1,2055	—0,0197	—1,5134
0,3	0,0695	—0,8294	0,0507	—0,7027	0,0057	—0,4033	—0,0679	0,0728	—0,1751	0,7740	—0,0933	0,2563
0,47355	0	0	0	0,0895	0	0,3066	0	—0,0613	0	0,4499	0	0,0452

Die Lage des Druckpunktes bzw. des Angriffspunktes der äußeren Last (Bild 3) errechnet sich mit dem Momentensatz zu

$$\xi_0 = \frac{1}{m_b \zeta_b} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{\zeta_b} \left(\xi \cdot p \Big/ \frac{3}{4} \frac{\eta U}{h_0^2} \sqrt{2 r' h_0} \right) d\xi \, d\zeta \quad \text{(35)},$$

worin $\xi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{2 r' h_0}}$ ist.

Zur Ermittlung der Reibung wird die Schubspannungsverteilung benötigt, die nach dem schon benutzten Ansatz (Gl. (17)) unter Einbeziehung der Spaltgleichung (22) geschrieben werden kann

$$\tau = -\frac{\eta U}{h_0 + \frac{x^2}{2 r'}} - \frac{dp}{dx} \frac{h_0 + \frac{x^2}{2 r'}}{2} \quad \text{(36)}.$$

Mit der Einführung der dimensionslosen Größe $\xi = \frac{x}{\sqrt{2 r' h_0}}$ oder $\frac{x^2}{2 r'} = \xi^2 h_0$ und $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2 r' h_0}} \frac{dp}{d\xi}$ wird dann

$$\tau = -\frac{\eta U}{h_0 (1 + \xi^2)} - \frac{dp}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{2 r' h_0}} \frac{h_0 (1 + \xi^2)}{2} \quad \text{(36a)}.$$

Die Differentiation der Gl. (33) liefert dazu

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{3}{4} \frac{\eta U}{h_0^2} \sqrt{2 r' h_0} \left\{ \left(1 - \frac{\operatorname{Cos} \mu_0 \zeta}{\operatorname{Cos} \mu_0 \zeta_b} \right) \varphi_0' + \sum_{n=1} \left(\frac{\operatorname{Cos} \mu_{n-1} \zeta}{\operatorname{Cos} \mu_{n-1} \zeta_b} - \frac{\operatorname{Cos} \mu_n \zeta}{\operatorname{Cos} \mu_n \zeta_b} \right) \varphi_n' \right\},$$

worin die φ_n'-Werte die Ableitungen der Funktionswerte φ_n bedeuten und die Tangenten an den Funktionskurven darstellen, die die angewandte numerische Rechnung unmittelbar mitliefert. Nur die Gewinnung der φ_0'-Werte erfolgt mit der differenzierten Gl. (28)

$$\varphi_0' = 6 \frac{\eta U}{h_0^2} \sqrt{2 r' h_0} \cdot \frac{\xi^2 - \xi_2^2}{(1 + \xi^2)^3}.$$

Ihre zahlenmäßigen Werte sind in der Zahlentafel 3 aufgeführt. Mit der Abkürzung $\Phi(\xi, \zeta)$ für den geschweiften Klammerausdruck in $\frac{dp}{d\xi}$ heißt die Gl. (36a) nun

$$\tau = -\frac{\eta U}{h_0} \left\{ \frac{1}{1 + \xi^2} + \frac{3}{8} (1 + \xi^2) \cdot \Phi(\xi, \zeta) \right\} \quad \text{(36b)}.$$

Die Reibung pro Breiteneinheit T' erbringt wieder die durch ζ_b dividierte Integration der Gl. (36b). Sie heißt dann

$$T' = -\eta U \sqrt{\frac{2 r'}{h_0}} \frac{1}{\zeta_b} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{\zeta_b} \left\{ \frac{1}{1 + \xi^2} + \frac{3}{8} (1 + \xi^2) \Phi(\xi, \zeta) \right\} d\xi \, d\zeta \quad \text{(37)}.$$

III. Auswertung der Theorie.

Es ist zweckmäßig, einen allgemeinen Überblick über die Wirkung der Gleitschuhlänge, -breite und -stellung auf die Trag- und Reibungseigenschaften des betrachteten Gleitsystems zu gewinnen. Während der Einfluß der Gleitschuhlänge und -stellung durch die in der Zahlentafel 1 angegebenen Funktionswerte f_i und φ_i bereits gegeben ist, kommt die Beeinflussung infolge der Gleitschuhbreite unter mittelbarer Mitwirkung der Gleitschuhstellung durch die λ_i-Werte erst bei der Errechnung der Klammerausdrücke in den Gl. (14) und (33) zustande. Die Klammerausdrücke sind als Beispiel für den ebenen Gleitschuh mit $a = 1{,}25$ und den Breiten $b = 1{,}5$, 1 und 0,5 in Bild 6 dargestellt. Sie lassen erkennen, daß der erste Klammerausdruck den Hauptanteil zu der Breitenwirkung beiträgt, der durch die nächstfolgenden je nach der vorgegebenen Breite mehr oder weniger verbessert wird.

Die Kenntnis über die Druck- und Schubspannungsverteilung auf der Gleitfläche ist im allgemeinen nicht sonderlich wichtig. Die Verteilungen haben im wesentlichen alle die im Bild 7a und b für das Beispiel des ebenen Gleitsystems ($a = 1{,}25$ und $b = 1$) und die im Bild 7c und d für das Beispiel des balligen Gleitsystems ($\xi_1 = -2$ und $\zeta_b = 2$) gezeigte Ge-

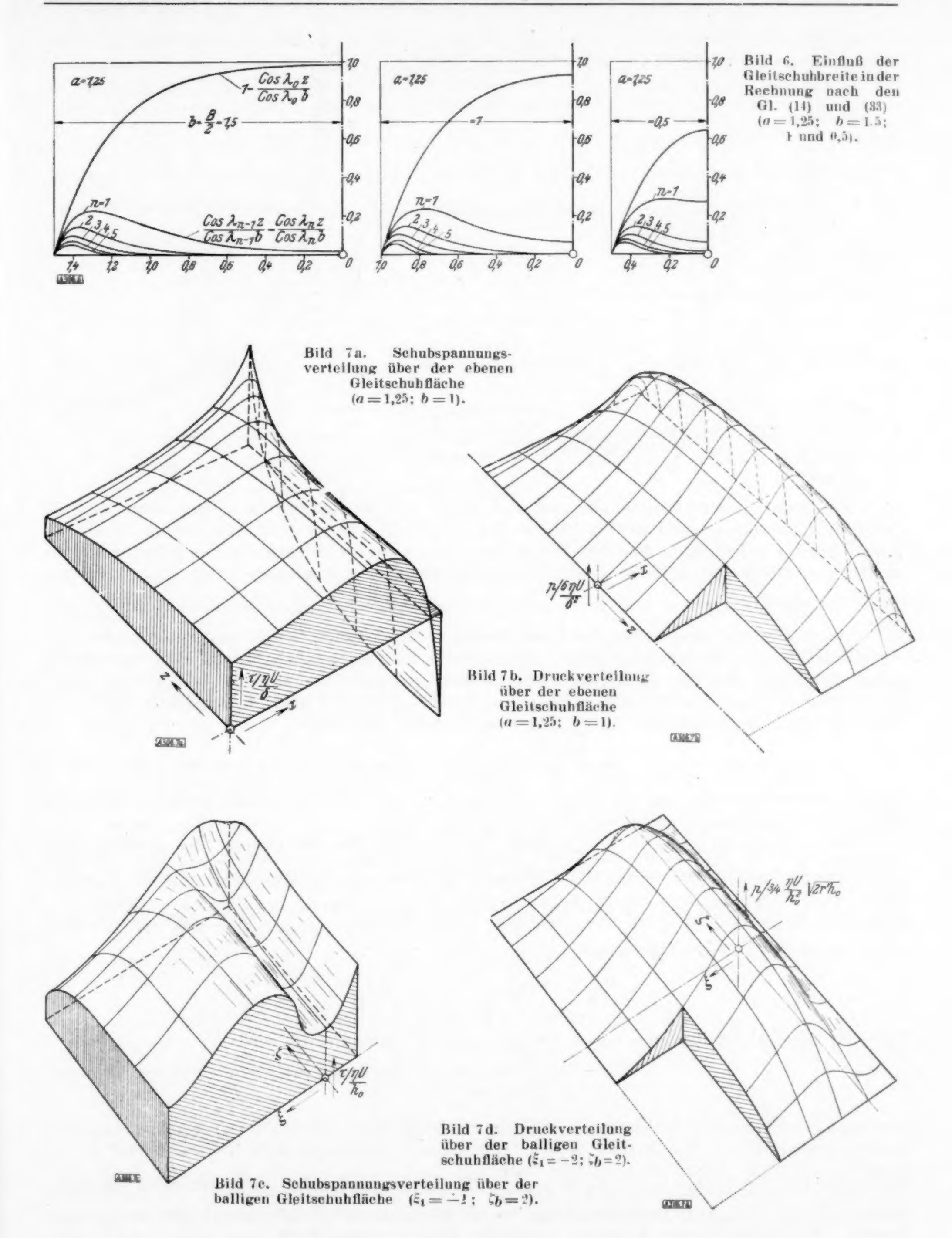


Bild 6. Einfluß der Gleitschuhbreite in der Rechnung nach den Gl. (14) und (33) ($a = 1,25$; $b = 1,5$; 1 und 0,5).

Bild 7a. Schubspannungsverteilung über der ebenen Gleitschuhfläche ($a = 1,25$; $b = 1$).

Bild 7b. Druckverteilung über der ebenen Gleitschuhfläche ($a = 1,25$; $b = 1$).

Bild 7c. Schubspannungsverteilung über der balligen Gleitschuhfläche ($\xi_1 = -2$; $\zeta_b = 2$).

Bild 7d. Druckverteilung über der balligen Gleitschuhfläche ($\xi_1 = -2$; $\zeta_b = 2$).

stalt. Dagegen ermöglichen die durch die Integration obiger Verteilungen ermittelten Trag- und Reibungsgrößen eine leichte Beurteilung der Trag- und Reibungseigenschaften solcher Gleitsysteme. Es ist deshalb für eine schnellere und bequemere Bearbeitung eines Gleitsystems vorteilhaft, die obengenannten Größen für verschiedene Parameter b bzw. ζ_b auszurechnen und graphisch darzustellen. Zugleich läßt diese Darstellung auch die Abhängigkeit der erwähnten Eigenschaften von Veränderungen am Gleitsystem sofort erkennen.

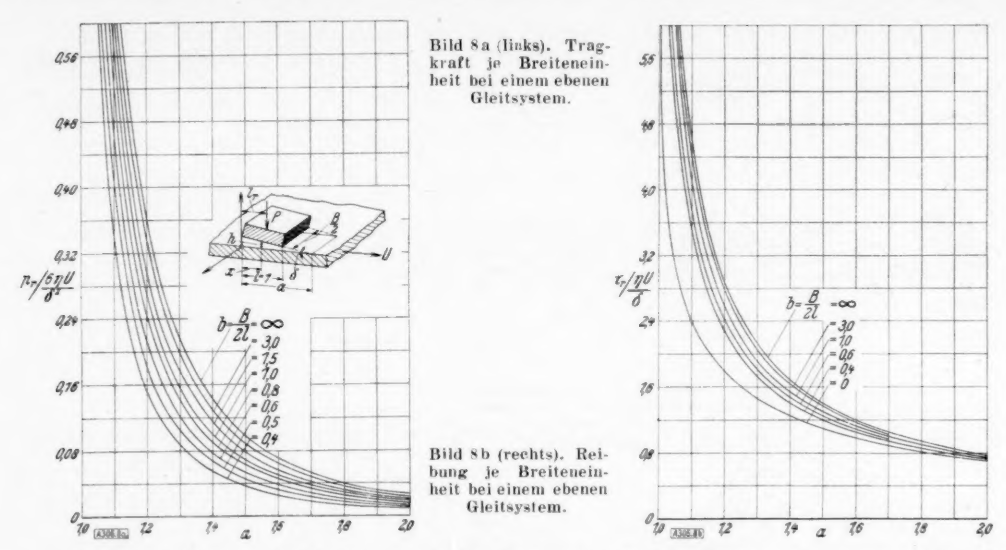


Bild 8a (links). Tragkraft je Breiteneinheit bei einem ebenen Gleitsystem.

Bild 8b (rechts). Reibung je Breiteneinheit bei einem ebenen Gleitsystem.

Für den ebenen Gleitschuh sind die Trag- und Reibungsgrößen nach den Gl. (15) und (20a)[10]) errechnet und in den Bildern 8a und 8b in Abhängigkeit von der charakteristischen Größe a aufgetragen worden. Sie stellen, da die Gleitschuhlänge schon früher als Maßeinheit gewählt wurde, zugleich Werte für die Breiteneinheit des Gleitschuhes dar. Als Parameter für die Kurvenschar tritt hierbei die dimensionslose halbe Gleitschuhbreite $b = \frac{B}{2\,l}$ auf, wo b wegen der zur Längsachse des Gleitsystems symmetrischen Druck- und Schubspannungsverteilung von der Breitenmitte zählt. Die äußeren Kurven der Scharen im Bild 8a und 8b geben die Werte für die extremen Gleitschuhbreiten $b = \infty$ und 0 an und begrenzen somit das in Betracht kommende Kurvengebiet. Die Beziehung für die größten Tragkräfte bei $b = \infty$ kann aus der Integration der Gl. (8) gewonnen werden und lautet

$$p_r \Big/ \frac{6\,\eta\,U}{\delta^2} = \ln\frac{a}{a-1} - \frac{2}{2\,a-1}\,.$$

Die kleinsten Tragkräfte bei der Breite $b = 0$ sind für alle a-Werte identisch Null. Die Kurve fällt mit der Abszisse zusammen.

Die Integration der Gl. (17a) ergibt die Formeln zur Berechnung der größten und kleinsten Reibungswerte, wenn der Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}$ entsprechend eliminiert wird. Dazu gilt für $b = \infty$ der Ausdruck $\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} = \frac{6\,\eta\,U}{\delta^2}\left(\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{2\,a\,(a-1)}{(2\,a-1)\,(a-x)^3}\right)$. Mit diesem Ausdruck heißt die Berechnungsformel

$$\tau_r \Big/ \frac{\eta\,U}{\delta} = -\left(4\ln\frac{a}{a-1} - \frac{6}{2\,a-1}\right).$$

Für sehr schmale Gleitschuhe mit $b \to 0$ geht auch $\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} \to 0$, und es wird

$$\tau_r \Big/ \frac{\eta\,U}{\delta} = -\ln\frac{a}{a-1}\,.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet nur, daß die Schubspannung der positiven x-Achse entgegengesetzt gerichtet ist. Die letzten beiden Grenzkurven vereinigen sich bei $a = 1$ und $a = \infty$ und verlaufen von $\tau_r \Big/ \frac{\eta\,U}{\delta} = \infty$ nach $\tau_r \Big/ \frac{\eta\,U}{\delta} = 0$. Sie umfassen den verhältnismäßig schmalen Bereich, in dem die ganze Breitenwirkung des Gleitsystems auf die Reibungskräfte zur Geltung kommt. Für große Werte a laufen sämtliche Kurven gegen Null, was aber nicht gleichbedeutend sein muß mit $\tau_r \to 0$. In diesem Falle geht auch $\delta \to 0$, und die Reibung bleibt in dieser Form unbestimmt. Die wirkliche Lösung ergibt sich hierfür aus der Gl. (17) mit $\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} = 0$ und $h = \mathrm{const}$ zu $\tau_r = -\frac{\eta\,U}{h}$.

[10]) Das negative Vorzeichen der Gleichung gibt an, daß die Reibung der positiven x-Achse entgegengesetzt gerichtet ist. Es blieb daher bei der Auswertung unberücksichtigt.

Für den balligen Gleitschuh lassen sich die Trag- und Reibungsgrößen, die in Übereinstimmung mit denen des ebenen Gleitschuhes auch wieder für die Breiteneinheit gelten sollen, in Abhängigkeit von der dimensionslosen Lagerlänge ξ_1 nach den Gl. (34) und (37) bestimmen, worin die dimensionslose Breite ζ_b als Parameter auftritt. Die so entstandene Kurvenschar für $P' \Big/ \frac{3}{2} \frac{\eta U}{h_0} r'$ zeigt Bild 9a. Sie wird nach oben durch die bei unendlicher Gleitschuhbreite $\zeta_b = \infty$ ermittelte Kurve begrenzt, die für $\xi_1 \to \infty$ sich asymptotisch dem Höchstwert $P' \Big/ \frac{3}{2} \frac{\eta U}{h_0} r' = 1{,}6317$ nähert. Ihre Bestimmungsgleichung ist aus der Integration der Gl. (28) hervorgegangen und lautet

$$P' \Big/ \frac{3}{2} \frac{\eta U}{h_0} r' = 1 + (\xi_1 - \xi_2) \frac{\xi_1^3 (1 - 3\xi_2^2) - \xi_1 (1 + 5\xi_2^2)}{(1 + \xi_1^2)^2} - \frac{1 + \xi_2^2}{1 + \xi_1^2}$$
$$+ (1 - 3\xi_2^2) \cdot \xi_2 (\operatorname{arctg} \xi_2 - \operatorname{arctg} \xi_1) .$$

Die unterste Grenze dieses Gebietes fällt wieder mit $P' \Big/ \frac{3}{2} \frac{\eta U}{h_0} r' = 0$ mit der Abszisse zusammen.

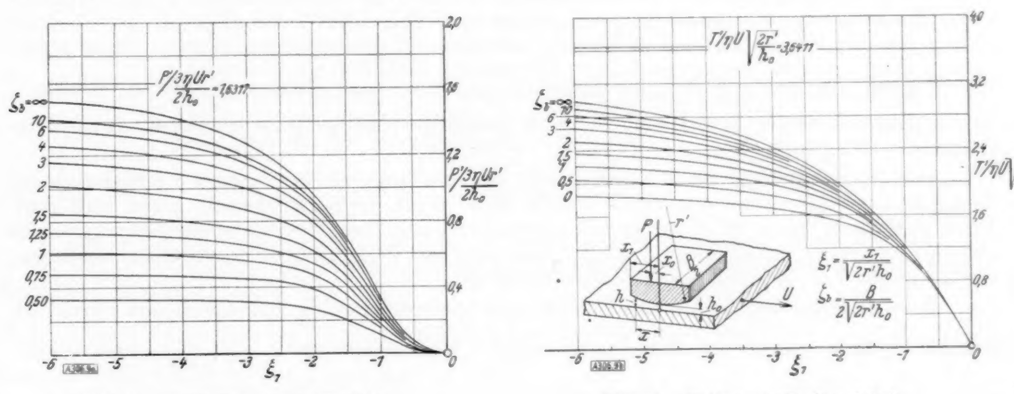


Bild 9a. Tragkraft je Breiteneinheit bei einem balligen Gleitsystem.

Bild 9b. Reibung je Breiteneinheit bei einem balligen Gleitsystem.

In Bild 9b wird die entsprechende Kurvenschar für die Reibungsgrößen $T' / \eta U \sqrt{\frac{2r'}{h_0}}$ gezeigt. Auch hier wurde das negative Vorzeichen der Gl. (37) wie schon beim ebenen Gleitschuh nur als Richtungszeichen der Reibung gewertet. Die beiden Begrenzungen sind wieder wie beim ebenen Gleitschuh durch die Breiten $\zeta_b = 0$ und ∞ angebbar. Ihre Beziehungen werden aus den Integrationen der Gl. (36a) erhalten und zwar für den unendlich breiten Gleitschuh mit Hilfe von $\frac{dp}{d\xi} = \frac{d\varphi_0}{d\xi}$ aus der Gl. (28) zu

$$T' / \eta U \sqrt{\frac{2r'}{h_0}} = -\left\{(2{,}5 - 1{,}5\,\xi_2^2)(\operatorname{arctg} \xi_2 - \operatorname{arctg} \xi_1) - \frac{3}{2}\left(\xi_2 - \xi_1 \frac{1 + \xi_2^2}{1 + \xi_1^2}\right)\right\}$$

und für den sehr schmalen Gleitschuh $\zeta_b \to 0$ mit $\frac{dp}{d\xi} \to 0$ zu

$$T' / \eta U \sqrt{\frac{2r'}{h_0}} = -(\operatorname{arctg} \xi_2 - \operatorname{arctg} \xi_1) .$$

Die letzte Gleichung gilt nur unter der Annahme, daß die zwischen ξ_1 und ξ_2 bestehende Beziehung, die ursprünglich für den unendlich breiten Gleitschuh abgeleitet und später auch für den endlich breiten übernommen wurde, auch noch für die Breite $\zeta_b = 0$ anerkannt wird. In Wirklichkeit besteht bei $\frac{dp}{d\xi} \to 0$ zwischen ξ_2 und ξ_1 keine Beziehung mehr. Damit verliert diese Grenzkurve ihre praktische Bedeutung und hat nur Sinn als theoretische Grenze des Kurvengebietes. Beide Grenzkurven beginnen bei $\xi_1 = 0$ mit der Reibungsgröße $T' / \eta U \sqrt{\frac{2r'}{h_0}} = 0$ und streben für $\xi_1 \to \infty$ asymptotisch gegen die festen Werte $T' / \eta U \sqrt{\frac{2r'}{h_0}} = 3{,}6411$ und $2{,}0144$.

Der Abszissenwert $\xi_1 = 0$ ist gegeben, wenn x_1 = Gleitschuhlänge selbst Null wird oder wenn $h_0 \to \infty$ geht. Der erste Fall hat keinen praktischen Sinn, wogegen der zweite einem parallelen Spalt nahekommt, für den bekanntlich $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\xi} = 0$ und $h = \mathrm{const}$ ist. Hierfür bleibt T' bei Anwendung der obigen Formel unbestimmt. Die richtige Lösung ergibt sich wieder aus der einfachen Schubspannungsbeziehung $\tau_r = -\frac{\eta U}{h}$.

Die beiden Diagrammpaare nach den Bildern 8a und b und 9a und b ermöglichen nun ohne große Rechnung und Zeitaufwand die Gleiteigenschaften eines gegebenen Gleitsystems zu ermitteln. Insbesondere läßt sich hiermit der Einfluß einer Spaltveränderung auf die Trag- und Reibungskräfte feststellen.

Beim ebenen Gleitsystem bewirkt eine Spaltveränderung bei festgehaltenem a eine Veränderung des Winkels δ und umgekehrt bei festem δ eine Veränderung der Größe a. Während der Winkel δ als Faktor in die Rechnung eingeht und die Diagramme dabei unberührt läßt, ist die Auswirkung von a auf die Rechnung aus den Diagrammen zu entnehmen. Alle Trag- und Reibungszustände des gewählten Gleitsystems bewegen sich dann auf den durch die dimensionslose Breitenabmessung $b = B/2\,l$ vorgeschriebenen Kurven, worin B die ganze Gleitschuhbreite und l die Gleitschuhlänge bedeutet. Da die nunmehr mit a und b ermittelbaren Kurvenwerte, wie schon früher erwähnt, die Trag- und Reibungsgrößen pro Breiteneinheit angeben, errechnen sich daraus die absoluten Trag- und Reibungskräfte durch Multiplizieren mit der Breite B und den Werten $\frac{6\eta U}{\delta^2}$ bzw. $\frac{\eta U}{\delta}$. Hierbei ist nur zu beachten, daß bei zahlenmäßiger Auswertung für η, U und B gleichartige Dimensionen in Anwendung gebracht werden müssen.

Das Diagramm Bild 8a läßt erkennen, daß die Tragkraft des ebenen Gleitschuhes ins Unendliche wächst, wenn a gegen 1 abfällt, d. h. wenn der Austrittsspalt gegen Null geht. Diese Bedingung kann jedoch technisch infolge unvermeidbarer Oberflächenunebenheiten nicht ganz erfüllt werden. Gleichzeitig würde aber auch die Reibung über alle Grenzen ansteigen, so daß dieser Fall praktisch nicht durchführbar ist.

Beim balligen Gleitsystem macht sich eine Spaltveränderung, gekennzeichnet durch den engsten Spalt h_0, außer bei der dimensionslosen Gleitschuhlänge $\xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{2\,r'\,h_0}}$ auch gleichzeitig bei der dimensionslosen Gleitschuhbreite $\zeta_b = \frac{B}{2\sqrt{2\,r'\,h_0}}$ bemerkbar. Das Aufsuchen der dimensionslosen Trag- und Reibungsgrößen für gegebene Gleitschuhabmessungen aus den Diagrammen Bild 9a und 9b ist daher im Gegensatz zum ebenen Gleitschuh mit einer Wanderung von einer Kurve zur anderen verbunden. Obwohl die Kurvenwerte für $\xi_1 = \infty$ endlich bleiben, werden die Trag- und Reibungskräfte selbst auch hierbei unendlich groß, da gleichzeitig $h_0 \to 0$ geht.

Zur Bestätigung der vorstehend entwickelten Theorie sind Versuche durchgeführt worden, deren Beschreibung und Ergebnisse zusammen mit einem Auszug aus dieser Abhandlung in der Zeitschrift Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens[11]) erscheinen werden. Die Versuche zeigen in den Grenzen der Meßgenauigkeit gute Übereinstimmung mit der Theorie.

IV. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird der dreidimensionale Strömungsvorgang untersucht, der sich in dem Schmiermittel mit konstanter Zähigkeit zwischen einem endlich breiten Gleitschuh und einer Gleitbahn einstellt, wenn zwischen beiden eine relative Geschwindigkeit parallel zur Gleitbahn herrscht. Die Untersuchung erstreckt sich auf zwei Gleitsysteme, auf den ebenen, der aus der ebenen Gleitbahn und dem unter einem kleinen Winkel dazu geneigten ebenen Gleitschuh gebildet wird, und auf den balligen, bei dem die Gleitfläche des Gleitschuhes konvex ist. Das Ergebnis ist die Berechnung der Trag- und Reibungseigenschaften der genannten Gleitsysteme, die zwecks bequemer Anwendung in der Praxis auch zahlenmäßig ausgewertet und in den Diagrammen Bild 8a und b sowie Bild 9a und b dargestellt sind. Dadurch ist es leicht möglich, die Gleiteigenschaften der unter verschiedenen Bedingungen arbeitenden Gleitsysteme miteinander zu vergleichen.

Herrn Prof. Dr. L. Prandtl sage ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Unterstützung bei ihrer Durchführung meinen herzlichsten Dank, ebenso Herrn Dozent Dr. H. Görtler für die liebenswürdigen Beratungen bei den theoretischen Entwicklungen. 306

[11]) W. Frössel: Reibungswiderstand und Tragkraft eines Gleitschuhes endlicher Breite, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 13 (1942) H. 2, S. 65 bis 75.

Zur Theorie der kompressiblen Potentialströmungen II.

Intermediäre und singuläre Integrale der Grundgleichung der ebenen adiabatisch kompressiblen Potentialströmung.

Von *H. Behrbohm* und *M. Pinl* (Messerschmitt-A. G.) in Augsburg.

Mit Hilfe einer auf G. Boole zurückgehenden Methode gelingt die Integration der beiden „integrablen Kombinationen" der zur Grundgleichung der ebenen adiabatisch kompressiblen Potentialströmung gehörigen beiden Charakteristikensysteme. Damit sind zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung gewonnen, deren jede Lösung auch der Grundgleichung (zweiter Ordnung) für das Geschwindigkeitspotential des adiabatisch kompressiblen ebenen Strömungsproblems genügt (intermediäre Integrale).

Die Integration dieser Differentialgleichungen erster Ordnung wird im nichtsingulären Falle nach Cauchys Charakteristikentheorie, im singulären Falle nach Lagranges Theorie des vollständigen Integrals durchgeführt. In beiden Fällen sind die Integralflächen $z(x, y)$, welche das Geschwindigkeitspotential repräsentieren, Torsen. Im singulären Falle verschwindet die Schallgeschwindigkeit im Strömungsfeld, dagegen nicht im allgemeineren nichtsingulären Falle. Für spezielle Konstantenwahl gehen die Resultate der Untersuchung in mehr oder weniger bekannte Ergebnisse aus der Theorie der Minimalflächen über.

§ 1. Einleitung.

Das Geschwindigkeitspotential $z = z(x, y)$ einer ebenen adiabatisch kompressiblen Strömung mit der x, y-Ebene als Strömungsebene genügt der quasilinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$[\lambda + \mu (p^2 + q^2) - p^2] r - 2 p q s + [\lambda + \mu (p^2 + q^2) - q^2] t = 0 \quad \ldots\ldots (1,1),$$

wenn — wie üblich — zur Abkürzung

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

geschrieben wird, und wenn ferner mit Verwendung irgendwelcher Normierungswerte a_0 und w_0 für die Schallgeschwindigkeit $a(x, y)$ und den Geschwindigkeitsbetrag $w(x, y)$ im Strömungsfeld

$$\lambda = a_0^2 + \frac{\varkappa - 1}{2} w_0^2, \quad \mu = \frac{1 - \varkappa}{2}$$

gesetzt wird; $\varkappa$ ist dabei der adiabatische Exponent, so daß unter gewöhnlichen physikalischen Bedingungen μ negativ ist. Eine Herleitung der Differentialgleichung (1,1) findet man in unserer unter [1][1]) genannten Arbeit. Wie dort führen wir auch hier die Bezeichnungen

$$A = \lambda + \mu (p^2 + q^2), \quad C = \lambda + (\mu - 1)(p^2 + q^2)$$

ein und setzen noch

$$R = A - p^2 = C + q^2, \quad S = -p q, \quad T = A - q^2 = C + p^2,$$

so daß (1,1) auch in der Gestalt

$$R(p, q) r + 2 S(p, q) s + T(p, q) t = 0 \quad \ldots\ldots (1,2)$$

geschrieben werden kann.

Zur Behandlung der Grundgleichung (1,1) oder (1,2) werden zumeist Methoden vorangestellt, welche die quasilineare Gleichung durch eine lineare ersetzen. Dazu empfiehlt sich entweder Legendres Berührungstransformation [2] oder eine Linearisierung durch eine geeignet verallgemeinerte Minkowskische Stützfunktion [3]. Demgegenüber versuchen wir hier einen direkten Weg zu gehen, wie er der klassischen Charakteristikentheorie [4], [5], [6], [7] entspricht.

[1]) Die Ziffern in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit.

Wir betrachten also die beiden Charakteristikensysteme [2])

$$\mathrm{d}z - p\,\mathrm{d}x - q\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}y - \nu_1\,\mathrm{d}x = 0, \quad \mathrm{d}p + \nu_2\,\mathrm{d}q = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1{,}3\mathrm{a}),$$

$$\mathrm{d}z - p\,\mathrm{d}x - q\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}y - \nu_2\,\mathrm{d}x = 0, \quad \mathrm{d}p + \nu_1\,\mathrm{d}q = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1{,}3\mathrm{b}),$$

die durch die Lösungen

$$\nu_1 = \frac{-p\,q + i\sqrt{A\,C}}{C + q^2}, \quad \nu_2 = \frac{-p\,q - i\sqrt{A\,C}}{C + q^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1{,}4)$$

der quadratischen Gleichung

$$R\,\nu^2 - 2\,S\,\nu + T = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1{,}5)$$

näher bestimmt werden. Wir setzen zunächst $A\,C \neq 0$ voraus. Dann sind die beiden Systeme voneinander verschieden.

Für $\lambda = \mu = 1$ entsteht aus (1,1) die Differentialgleichung

$$(1 + q^2)\,r - 2\,p\,q\,s + (1 + p^2)\,t = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1{,}6)$$

der gewöhnlichen Minimalflächen. Ferner gilt in diesem Falle

$$A = 1 + p^2 + q^2, \quad \nu_1 = \frac{-p\,q + i\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{1 + q^2}, \quad \nu_2 = \frac{-p\,q - i\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{1 + q^2}.$$

Diese Spezialisierung ist für unsere Untersuchung charakteristisch: durch sie gehen alle λ und μ enthaltenden Formeln in bekannte Beziehungen aus der Theorie der Minimalflächen über [3]. Wir werden in § 6 auf diesen Zusammenhang näher eingehen.

§ 2. Die integrablen Kombinationen der Charakteristikensysteme.

Nach (1,4) sind die Wurzeln ν_1 und ν_2 der quadratischen Gl. (1,5) Funktionen von p und q allein. Mithin ergeben sich aus (1,3a) und (1,3b) die beiden integrablen Kombinationen

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = p' = -\nu = \frac{p\,q \mp \sqrt{p^2 q^2 - (C + p^2)(C + q^2)}}{C + q^2}.$$

In beiden Fällen folgt

$$p'^2 (C + q^2) - 2\,p\,p'\,q = -(C + p^2), \quad -C\,(p'^2 + 1) = (q\,p' - p)^2.$$

Zur Integration dieser gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung setzen wir [3])

$$p = \varrho \sin\varphi(\varrho), \quad q = \varrho\cos\varphi(\varrho); \quad \varrho^2 = p^2 + q^2, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{p}{q}$$

und bekommen

$$-[\lambda + (\mu - 1)\,\varrho^2]\left[1 + \varrho^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho}\right)^2\right] = \varrho^4\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho}\right)^2,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{p}{q} = \pm\, i \int\limits_{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}^{\sqrt{p^2 + q^2}} \sqrt{\frac{\lambda + (\mu - 1)\,\varrho^2}{\lambda + \mu\,\varrho^2}}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \mathrm{const}$$

nach geeigneter Wahl der Anfangswerte p_0 und q_0 [4]). Das sind aber zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit der Eigenschaft, daß — wie jetzt gezeigt werden soll — jede ihrer Lösungen auch Lösung unserer Grundgleichung (1,1) ist.

Sei nämlich $z(x, y)$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$F(p, q) \equiv \operatorname{arctg}\frac{p}{q} \mp i \int\limits_{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}^{\sqrt{p^2 + q^2}} \sqrt{\frac{\lambda + (\mu - 1)\,\varrho^2}{\lambda + \mu\,\varrho^2}}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \mathrm{const} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2{,}1).$$

[2]) Vgl. [4], Bd. I, Kap. II, § 50, S. 100.

[3]) Vgl. [7], S. 134.

[4]) Es sei etwa $(p_0^2 + q_0^2)\,[\lambda + \mu\,(p_0^2 + q_0^2)] \neq 0$.

Dann bestehen identisch in x, y (was wir durch die den Formeln beigefügten geschweiften Klammern $\{x, y\}$ andeuten) die folgenden Relationen[5]):

$$F(p,q)\equiv 0,\quad F_p r + F_q s \equiv 0,\quad F_p s + F_q t \equiv 0,\quad (F_p F_q \not\equiv 0,\ rt - s^2 \equiv 0) \qquad \{x,y\}$$

und es gilt somit

$$(A-p^2)\,r + (A-p^2)\frac{F_q}{F_p}\,s \equiv 0,\quad (A-q^2)\frac{F_p}{F_q}\,s + (A-q^2)\,t \equiv 0 \qquad \{x,y\}\ \ldots \quad (2{,}2).$$

Durch Addition der beiden Identitäten (2,2) folgt

$$(A-p^2)\,r + \left[(A-p^2)\frac{F_q}{F_p} + (A-q^2)\frac{F_p}{F_q}\right]s + (A-q^2)\,t \equiv 0 \qquad \{x,y\}\ \ldots \quad (2{,}3).$$

Nun gilt, falls wir noch zur Abkürzung $\pm W = \pm\sqrt{\frac{C}{A}}$ setzen,

$$F_p \equiv \frac{q \mp i p W}{p^2+q^2},\quad F_q \equiv -\frac{p \pm i q W}{p^2+q^2},\quad \frac{F_p}{F_q} \equiv -\frac{q \mp i p W}{p \pm i q W} \qquad \{x,y\}.$$

Hieraus ergibt sich nach einer leichten algebraischen Umformung für den Koeffizienten der Ableitung s in (2,3)

$$(A-p^2)\frac{F_q}{F_p} + (A-q^2)\frac{F_p}{F_q} \equiv -(A-p^2)\frac{p \pm i q W}{q \mp i p W} - (A-q^2)\frac{q \mp i p W}{p \pm i q W} \equiv -2pq \qquad \{x,y\}.$$

Damit ist also in der Tat gezeigt: die beiden (Scharen von) partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{p}{q} - i\int\limits_{\sqrt{p_0^2+q_0^2}}^{\sqrt{p^2+q^2}} \sqrt{\frac{\lambda+(\mu-1)\,\varrho^2}{\lambda+\mu\,\varrho^2}}\,\frac{d\varrho}{\varrho} + \text{const} = 0} \quad \ldots \ldots \quad (2{,}4\,\text{a}),$$

$$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{p}{q} + i\int\limits_{\sqrt{p_0^2+q_0^2}}^{\sqrt{p^2+q^2}} \sqrt{\frac{\lambda+(\mu-1)\,\varrho^2}{\lambda+\mu\,\varrho^2}}\,\frac{d\varrho}{\varrho} + \text{const} = 0} \quad \ldots \ldots \quad (2{,}4\,\text{b})$$

definieren zwei intermediäre Integralscharen der Grundgleichung (1,1). Wie man durch partielle Differentiation nach q leicht feststellt, entspricht dabei (2,4 a) dem System (1,3 a) und (2,4 b) dem System (1,3 b).

Bis jetzt hatten wir immer $AC \not\equiv 0$ vorausgesetzt. Für $AC \equiv 0$ fallen die beiden Charakteristikensysteme (1,3 a) und (1,3 b) zusammen. Insbesondere ergibt sich für $A \equiv 0$, $C \not\equiv 0$:

$$\lambda + \mu\,(p^2+q^2) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2{,}5)$$

und daher für jede Lösung $z(x,y)$ dieser partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\lambda + \mu\,(p^2+q^2) \equiv 0,\quad pr + qs \equiv 0,\quad ps + qt \equiv 0,\quad rt - s^2 \equiv 0,$$

$$R(p,q)\,r + 2\,S(p,q)\,s + T(p,q)\,t \equiv 0 \qquad \{x,y\}\ ^{6)}.$$

Daher gilt: die Torsen (2,5) sind singuläre intermediäre Integrale der Grundgleichung (1,1).

Demgegenüber führt die Differentialgleichung $C \equiv \lambda + (\mu-1)\,(p^2+q^2) = 0$ nicht auf intermediäre Integrale von (1,1). Während die Differentialgleichungen (2,4 a b) der nichtsingulären intermediären Integrale von einer additiven Konstanten abhängen, ist die Gl. (2,5) der singulären intermediären Integrale durch die Konstanten λ und μ völlig bestimmt.

---

[5]) Partielle Ableitungen nach den Argumenten p, q, σ, τ, u, v deuten wir durch Indizes an, z. B.: $F_p, F_q, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{y}_\tau, x_{1\sigma}, x_{3\tau}$; Ableitungen nach den Argumenten τ und u zeigen wir öfters auch durch Striche an, z. B.: $w', f', g', c_k', \psi', \psi''$.

[6]) Vgl. [1], S. 202 (der zuerst genannten Arbeit).

§ 3. Die nichtsingulären intermediären Integralflächen.

Wir betrachten das Charakteristikensystem der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (2,1) und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma}=F_p=\frac{q\mp i\,p\,W}{p^2+q^2}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\sigma}=F_q=-\frac{p\pm i\,q\,W}{p^2+q^2}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\sigma}=p\,F_p+q\,F_q=\mp\,i\,W, \\ &\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\sigma}=-(p\,F_z+F_x)=0, \qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\sigma}=-(q\,F_z+F_y)=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (3,1).$$

Nach den beiden letzten Gleichungen dieses Systems sind p und q vom Kurvenparameter σ unabhängig. Durch Integration erhalten wir entsprechend (für beliebige Differentialgleichungen $F=0$ der beiden Scharen) die vierparametrige Streifenschar [7])

$$\left.\begin{aligned} &x(\sigma)=c_1+\sigma\,\frac{q\mp i\,p\,W}{p^2+q^2}, \qquad y(\sigma)=c_2-\sigma\,\frac{p\pm i\,q\,W}{p^2+q^2}, \\ &z(\sigma)=c_3\mp i\,\sigma\,W, \qquad p(\sigma)=c_4, \qquad q(\sigma)=c_5 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3,2),$$

längs welcher die Funktion F zufolge (3,1) bekanntlich einen konstanten Wert annimmt $\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\sigma}=0\right)$. Indem wir längs (3,2) speziell das Verschwinden dieses konstanten Wertes vorschreiben, gewinnen wir die zu der bestimmten Differentialgleichung (2,1) aus den beiden Scharen jeweils zugehörige dreiparametrige Schar „charakteristischer Streifen". Ihr Träger ist der Geradenkomplex

$$\mathfrak{x}(\sigma)=\mathfrak{y}+\sigma\,\mathfrak{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3,3),$$

wo die Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch die folgenden Komponenten gegeben sind:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{x}=\{x_1, x_2, x_3\}=\{x, y, z\}, \qquad \mathfrak{y}=\{y_1, y_2, y_3\}=\{c_1, c_2, c_3\}, \\ &\mathfrak{z}=\{z_1, z_2, z_3\}=\left\{\frac{q\mp i\,p\,W}{p^2+q^2}, \; -\frac{p\pm i\,q\,W}{p^2+q^2}, \; \mp\,i\,W\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3,4).$$

Die Integralflächen von (2,1) sind spezielle Regelflächen im Geradenkomplex (3,3). Um sie zu bestimmen, entnehmen wir der Streifenschar (3,2) die nur von dem einen Parameter τ abhängige Streifenschar

$$\mathfrak{x}(\sigma;\tau)=\mathfrak{y}(\tau)+\sigma\,\mathfrak{z}(\tau), \quad c_4=f(\tau), \quad c_5=g(\tau); \quad c_1=c_1(\tau), \quad c_2=c_2(\tau), \quad c_3=c_3(\tau) \quad . \; . \quad (3,5)$$

und betrachten die „Anfangskurve"

$$\mathfrak{x}(0;\tau)=\mathfrak{y}(\tau).$$

Die Anfangskurve $\mathfrak{y}(\tau)$ ist Träger eines „Anfangsstreifens", wofern für die Ableitungen c_k' ($k=1,2,3$) die Relation

$$c_3'(\tau)\equiv f(\tau)\,c_1'(\tau)+g(\tau)\,c_2'(\tau) \qquad \{\tau\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3,6)$$

besteht. Sie ist darüber hinaus Träger eines „Integralstreifens", wenn für f und g die Relation

$$F(f(\tau),g(\tau))\equiv \operatorname{arctg}\frac{f}{g}\mp i\int\limits_{\sqrt{f_0^2+g_0^2}}^{\sqrt{f^2+g^2}}\sqrt{\frac{\lambda+(\mu-1)\,\varrho^2}{\lambda+\mu\,\varrho^2}}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho}-\text{const}\equiv 0 \qquad \{\tau\} \quad . \; . \; . \quad (3,7)$$

besteht, und dieser Integralstreifen ist weder ein charakteristischer Streifen noch ein Fokalstreifen, falls

$$\Delta(0,\tau)\equiv(x_\sigma\,y_\tau-x_\tau\,y_\sigma)_{\sigma=0}=\frac{g\mp i\,f\,W}{f^2+g^2}\,c_2'+\frac{f\pm i\,g\,W}{f^2+g^2}\,c_1'\not\equiv 0 \qquad \{\tau\} \quad . \; . \; . \; . \quad (3,8)$$

gilt. Diese letzte Ungleichung garantiert ferner für die Matrix

$$\left\|\begin{matrix} x_\sigma, & y_\sigma, & z_\sigma \\ x_\tau, & y_\tau, & z_\tau \end{matrix}\right\|$$

in einer gewissen Umgebung von $\sigma=0$ den Rang 2. Mithin sind wir berechtigt, unter unseren Voraussetzungen der einparametrigen Streifenschar (3,5) die Trägerregelfläche $\mathfrak{x}(\sigma,\tau)$ zuzuordnen, und die Cauchysche Charakteristikentheorie liefert uns das Resultat: genügt die

[7]) Vgl. [6], Kap. II, § 3, S. 66.

Raumkurve $\mathfrak{y}(\tau)$ der Bedingung (3,6) und befriedigen die Funktionen $f(\tau)$ und $g(\tau)$ die Bedingungen (3,7) und (3,8), so sind die diese Anfangsbedingungen erfüllenden nichtsingulären intermediären Integralflächen der Grundgleichung (1,1) durch die Regelflächen

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(\sigma,\tau) &= c_1(\tau) + \sigma\frac{g(\tau) \mp i f(\tau) W(\tau)}{f^2(\tau)+g^2(\tau)}, \\ x_2(\sigma,\tau) &= c_2(\tau) - \sigma\frac{f(\tau) \pm i g(\tau) W(\tau)}{f^2(\tau)+g^2(\tau)}, \quad \pm W(\tau) = \pm\sqrt{\frac{\lambda+(\mu-1)(f^2+g^2)}{\lambda+\mu(f^2+g^2)}}, \\ x_3(\sigma,\tau) &= c_3(\tau) \mp i\sigma W(\tau) \end{aligned}} \quad . \quad . \quad (3,9)$$

gegeben.

In der Tat gestattet die Voraussetzung (3,8), die Funktionen $z(\sigma,\tau)$, $p(\tau)$, $q(\tau)$ als Funktionen $z(x,y)$, $p(x,y)$, $q(x,y)$ darzustellen, und die allgemeine Theorie zeigt, daß die so entstehenden Funktionen $p(x,y)$, $q(x,y)$ mit den partiellen Ableitungen z_x und z_y der so entstandenen Funktion $z(x,y)$ identisch sind [8]). Die Regelflächen (3,9) sind also Lösungen des partiellen Differentialproblems erster Ordnung und nach den Ergebnissen von § 2 auch solche des partiellen Differentialproblems zweiter Ordnung. Diesen Sachverhalt wollen wir noch durch die folgenden geometrischen Betrachtungen bekräftigen.

§ 4. Die Gaußsche Krümmung K und die mittlere Relativkrümmung H^*.

Die Differentialgleichung $F=0$ enthält die Veränderlichen x, y, z nicht explizit. Ihre Integralflächen sind daher notwendig Torsen. Eine zusätzliche Bestätigung dieser Tatsache erhalten wir durch das Verschwinden der Gaußschen Krümmung $K(\sigma,\tau)$ der Regelflächen (3,9). Wir berechnen sie als Quotient der Diskriminanten der zweiten und ersten metrischen Fundamentalform der Flächen (3,9) [9]):

$$K = \frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}, \quad h_{11} = \frac{(\mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{x}_{\sigma\sigma})}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}, \quad h_{12} = \frac{(\mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{x}_{\sigma\tau})}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}, \quad h_{22} = \frac{(\mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{x}_{\tau\tau})}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}.$$

Die Diskriminante $g_{11}g_{12}-g_{12}^2$ der ersten Fundamentalform verschwindet in unserem Falle nicht identisch, da wir $1+p^2+q^2 \not\equiv 0\,\{x,y\}$ voraussetzen. Da der Flächenortsvektor $\mathfrak{x}(\sigma,\tau)$ nach (3,9) von σ linear abhängt, verschwindet h_{11} und wir erhalten für die Diskriminante $h_{11}h_{22}-h_{12}^2$ der zweiten Fundamentalform den Ausdruck

$$-\frac{(\mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{x}_{\sigma\tau})^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} = -\frac{(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}_\tau + \sigma\mathfrak{z}_\tau, \mathfrak{z}_\tau)^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} = -\frac{(\mathfrak{z}_\tau, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}_\tau)^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4,1).$$

Für die weitere Rechnung führen wir die Abkürzungen

$$z_1(\tau) = \frac{g \mp i f W}{f^2+g^2}, \quad z_2(\tau) = -\frac{f \pm i g W}{f^2+g^2}, \quad z_3(\tau) = \mp i W,$$

$$m_1(\tau) = \pm i(W' z_2 - W z_2'), \quad m_2(\tau) = z_1 z_2' - z_2 z_1', \quad m_3(\tau) = \pm i(W z_1' - W' z_1)$$

ein. Dann ergibt sich für die Determinante $(\mathfrak{z}_\tau, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}_\tau)$ mit Rücksicht auf (3,4) und (3,6)

$$(\mathfrak{z}_\tau, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}_\tau) = [\pm i(z_2 W' - W z_2') + f(z_1' z_2 - z_1 z_2')]\,c_1' + [\pm i(W z_1' - z_1 W') + g(z_1' z_2 - z_1 z_2')]\,c_2'.$$

Verstehen wir jetzt unter p_1, p_2, p_3 die Komponenten des Flächennormalvektors $\mathfrak{x}_\sigma \times \mathfrak{x}_\tau$, so gilt

$$p_1 = x_{2\sigma}x_{3\tau} - x_{2\tau}x_{3\sigma}, \quad p_2 = x_{3\sigma}x_{1\tau} - x_{3\tau}x_{1\sigma}, \quad p_3 = x_{1\sigma}x_{2\tau} - x_{1\tau}x_{2\sigma},$$

$$p = -\frac{p_1}{p_3}, \quad q = -\frac{p_2}{p_3}.$$

Nun ist nach Voraussetzung (3,1)

$$-p_\sigma = \frac{p_3 p_{1\sigma} - p_1 p_{3\sigma}}{p_3^2} = 0, \quad -q_\sigma = \frac{p_3 p_{2\sigma} - p_2 p_{3\sigma}}{p_3^2} = 0$$

[8]) Vgl. [6], Kap. II, § 3, S. 67 bis 68.
[9]) Vgl. [3], Kap. IV, § 41, 42, 44; S. 85 bis 92.

XUM

oder

$$\left.\begin{aligned} -z_2(m_1-f m_2)\,c_1'+[z_1 m_1+m_2(\pm i W+g z_2)]\,c_2'&=0,\\ [(z_1 f\pm i W)\,m_2+z_2 m_3]\,c_1'+\qquad z_1(m_3-g m_2)\,c_2'&=0\end{aligned}\right\} \quad (4{,}2).$$

Diese beiden Bedingungen sind proportional, da ihre Determinante (bezüglich c_1' und c_2') verschwindet, und jede von ihnen ist mit dem Verschwinden der Determinante (4,1) äquivalent. Da (4,2) nach Voraussetzung besteht, verschwindet also notwendig $(\mathfrak{z}_\tau, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}_\tau)$ und daher auch die Gaußsche Krümmung $K(\sigma,\tau)$, wie dies für alle nichtisotropen Torsen charakteristisch ist.

Die mittlere Relativkrümmung der Flächen (3,9) ist durch

$$H^*=\frac{(\mathfrak{k},\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{x}_\tau)+(\mathfrak{k},\mathfrak{x}_\sigma,\mathfrak{e}_\tau)}{2(\mathfrak{k},\mathfrak{x}_\sigma,\mathfrak{x}_\tau)} \quad (4{,}3)$$

gegeben, worin $\mathfrak{k}$ einen willkürlichen Vektor bedeutet, für den nur $(\mathfrak{k},\mathfrak{x}_\sigma,\mathfrak{x}_\tau)\not\equiv 0$ gilt. $\mathfrak{e}(\sigma,\tau)$ ist der Ortsvektor der zu $\mathfrak{x}(\sigma,\tau)$ gewählten Eichfläche bzw. der Relativnormalvektor der Fläche $\mathfrak{x}(\sigma,\tau)$ im Sinne der relativen Flächentheorie [8], [9], [10]. Das Bestehen der Grundgleichung (1,1) ist mit $H^*\equiv 0$ äquivalent, wenn man den Relativnormalvektor $\mathfrak{e}(\sigma,\tau)$ gemäß

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}=\Big\{&-(2\mu-1)\,p\,[\lambda+\mu(p^2+q^2)]^{-\frac{1}{2\mu}},\quad -(2\mu-1)\,q\,[\lambda+\mu(p^2+q^2)]^{-\frac{1}{2\mu}},\\ &[\lambda+\mu(p^2+q^2)]^{-\frac{1}{2\mu}}[\lambda+(1-\mu)(p^2+q^2)]\Big\} \quad (4{,}4)\end{aligned}$$

wählt[10]. Nach (3,1) ist der Vektor $\mathfrak{e}$ mit den Komponenten (4,4) von σ unabhängig. Daher verschwindet die Determinante $(\mathfrak{k},\mathfrak{e}_\sigma,\mathfrak{x}_\tau)$. Jetzt wählen wir $\mathfrak{k}=\{0,0,1\}$. Dann reduziert sich $(\mathfrak{k},\mathfrak{x}_\sigma,\mathfrak{x}_\tau)$ auf

$$\Delta(\sigma,\tau)=x_{1\sigma}x_{2\tau}-x_{2\sigma}x_{1\tau}.$$

Nach Voraussetzung (3,8) verschwindet die Determinante $\Delta(\sigma,\tau)$ nicht identisch. Für die Berechnung von $(\mathfrak{k},\mathfrak{x}_\sigma,\mathfrak{e}_\tau)$ ergibt sich nach (4,4) und (3,9)

$$\left.\begin{aligned} &-x_{1\sigma}\left\{(2\mu-1)\,q\,A^{-\frac{1}{2\mu}}\right\}_\tau+x_{2\sigma}\left\{(2\mu-1)\,p\,A^{-\frac{1}{2\mu}}\right\}_\tau\\ &=-\frac{2\mu-1}{f^2+g^2}\left\{(g\mp i f W)\left(q\,A^{-\frac{1}{2\mu}}\right)_\tau+(f\pm i g W)\left(p\,A^{-\frac{1}{2\mu}}\right)_\tau\right\}\\ &=\frac{-(2\mu-1)}{f^2+g^2}A^{-\frac{1}{2\mu}-1}\left\{A(ff'+gg')\pm i A W(gf'-g'f)-\frac{A'}{2\mu}(f^2+g^2)\right\}\end{aligned}\right| \quad (4{,}5).$$

Nach (3,7) und (2,1) gilt

$$F(f(\tau),g(\tau))\equiv \operatorname{arctg}\frac{f(\tau)}{g(\tau)}\mp i\int\limits_{\sqrt{f_0^2+g_0^2}}^{\sqrt{f^2(\tau)+g^2(\tau)}}\sqrt{\frac{\lambda+(\mu-1)\varrho^2}{\lambda+\mu\varrho^2}}\,\frac{d\varrho}{\varrho}+\text{const}\equiv 0 \qquad \{\tau\}.$$

Diese Identität leiten wir einmal nach τ ab und erhalten

$$\frac{gf'-fg'}{f^2+g^2}\mp i\,\frac{ff'+gg'}{f^2+g^2}\sqrt{\frac{\lambda+(\mu-1)(f^2+g^2)}{\lambda+\mu(f^2+g^2)}}\equiv 0 \quad \{\tau\} \quad \text{bzw.}\quad \pm i W\equiv\frac{gf'-fg'}{ff'+gg'} \quad \{\tau\}. \quad (4{,}6).$$

Damit ergibt sich für den Klammerausdruck der rechten Seite von (4,5):

$$A(1-W^2)-(f^2+g^2)\equiv\lambda+\mu(f^2+g^2)-[\lambda+(\mu-1)(f^2+g^2)]-(f^2+g^2)\equiv 0 \quad \{\tau\}.$$

Somit verschwindet die Determinante $(\mathfrak{k},\mathfrak{x}_\sigma,\mathfrak{e}_\tau)$ identisch und daher ebenso auch die mittlere Relativkrümmung H^*.

§ 5. Die singulären intermediären Integralflächen.

Zur Integration der Differentialgleichung (2,5) der singulären intermediären Integralflächen empfiehlt sich die Lagrangesche Theorie der vollständigen Integrale[11]). Der mit

[10]) Vgl. [10], § 2, S. 81.

[11]) Vgl. [6], Kap. II, § 4, S. 70 bis 72.

(2,5) verknüpfte Mongesche Kurvenkomplex ergibt sich durch Elimination der Ableitungen p und q aus dem System:

$$A = \lambda + \mu (p^2 + q^2) = 0, \quad y' = \frac{d y}{d x} = \frac{A_q}{A_p} = \frac{q}{p}, \quad z' = \frac{d z}{d x} = \frac{p A_p + q A_q}{A_p} = \frac{p^2 + q^2}{p}$$

in der Gestalt der Mongeschen Gleichung

$$\lambda (1 + y'^2) + \mu z'^2 = 0 \quad \ldots \quad (5,1).$$

Wir betrachten sodann das vollständige Integral

$$\left. \begin{aligned} V(x, y, z; a_1, a_2, a_3(a_1, a_2)) &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0; \\ p = -\frac{a_1}{a_3}, \quad q = -\frac{a_2}{a_3}, \quad & \mu (a_1^2 + a_2^2) + \lambda a_3^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (5,2)$$

der Gleichung $A = 0$, d. h. eine zweiparametrige Ebenenschar. Sie enthält die einparametrige Lösungsschar

$$a_1 = 1 - u^2, \quad a_2 = i (1 + u^2), \quad a_3 = -2 \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\, u, \quad \mu (a_1^2 + a_2^2) + \lambda a_3^2 = 0,$$

die wir zur integrallosen Darstellung des Kurvenkomplexes (5,1) verwenden. Indem wir für a_4 die willkürliche analytische Funktion $-2 i \psi(u)$ einführen, gewinnen wir diese integrallose Darstellung aus dem System

$$\begin{aligned} (1 - u^2) x + i (1 + u^2) y - 2 \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\, u z &= 2 i \psi(u) \\ -2 u x + 2 i u \quad y - 2 \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \quad z &= 2 i \psi'(u) \\ -2 \quad x + 2 i \quad y \quad &= 2 i \psi''(u) \end{aligned}$$

$\left(\text{mit der reellen Systemdeterminante } 8 i \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)$ durch Auflösung nach x, y, z in der Gestalt

$$x = i \left(\psi - u \psi' - \frac{1 - u^2}{2} \psi'' \right), \quad y = \psi - u \psi' + \frac{1 + u^2}{2} \psi'', \quad z = -i \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} (\psi' - u \psi'') \quad . \quad . \quad (5,3).$$

Für die Darstellung gilt notwendig $\psi'''(u) \not\equiv 0 \{u\}$, wie man durch Berechnung der ersten Ableitungen x', y', z' erkennt. Man erhält so alle Komplexkurven mit Ausnahme der sogenannten „diskriminierenden Lösungen" [12]). Sie stellen die Fokalkurven der Charakteristiken von $A = 0$ dar und sind als solche notwendig die Gratlinien der Integraltorsen (die Charakteristiken selbst sind die diskriminierenden Lösungen der Mongeschen Gleichung (5,1)).

Die gesuchten singulären intermediären Integralfächen sind durch die Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(u, v) &= x(u) + v x' = i \left(\psi - u \psi' - \frac{1 - u^2}{2} \psi'' \right) - i v \frac{1 - u^2}{2} \psi''', \\ x_2(u, v) &= y(u) + v y' = \psi - u \psi' + \frac{1 + u^2}{2} \psi'' + v \frac{1 + u^2}{2} \psi''', \quad \psi''' \not\equiv 0 \quad \{u\}, \\ x_3(u, v) &= z(u) + v z' = -i \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} (\psi - u \psi'') + i \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\, u v \psi''' \end{aligned}} \quad . \quad . \quad (5,4)$$

gegeben; sie hängen von einer willkürlichen analytischen Funktion $\psi(u)$ ab, deren dritte Ableitung nicht identisch verschwindet.

Zum Beweis berechnen wir die Komponenten

$$\begin{vmatrix} x_{2u}, x_{3u} \\ x_{2v}, x_{3v} \end{vmatrix} = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} (1 - u^2) v \psi'''^2, \quad \begin{vmatrix} x_{3u}, x_{1u} \\ x_{3v}, x_{1v} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} (1 + u^2) v \psi'''^2, \quad \begin{vmatrix} x_{1u}, x_{2u} \\ x_{1v}, x_{2v} \end{vmatrix} = i u v \psi'''^2$$

[12]) Vgl. D. Hilbert: Math. Ann. Bd. 73 (1913), S. 93 bis 108.

des Normalvektors der Fläche (5,4). Bekanntlich gilt

$$-p = \begin{vmatrix} x_{2u}, x_{3u} \\ x_{2v}, x_{3v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_{1u}, x_{2u} \\ x_{1v}, x_{2v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}(1-u^2),$$

$$-q = \begin{vmatrix} x_{3u}, x_{1u} \\ x_{3v}, x_{1v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_{1u}, x_{2u} \\ x_{1v}, x_{2v} \end{vmatrix} = -\frac{i}{2u}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}(1+u^2)$$

und daher folgt

$$A = \lambda + \mu(p^2+q^2) \equiv 0 \quad \{u, v, \psi\}.$$

Die Torsen (5,4) sind also tatsächlich Lösungen von $A=0$ und daher auch solche der Grundgleichung (1,1).

Um zu einer reellen Darstellung der singulären intermediären Integralflächen zu kommen, entnehmen wir dem vollständigen Integral (5,2) die einparametrige Lösungsschar

$$a_1 = \pm i\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\cos u, \quad a_2 = \pm i\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\sin u, \quad a_3 = \pm 1, \quad a_4 = -\psi(u), \quad \mu(a_1^2+a_2^2)+\lambda a_3^2 = 0 \quad \{u\}.$$

Da $\mu < 0$, sind die Koeffizienten a_1 und a_2 für reelle u jetzt reell. An Stelle von (5,3) erhalten wir die Darstellung

$$x = \mp i\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}(\sin u\,\psi' + \cos u\,\psi''), \qquad y = i\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}(\cos u\,\psi' - \sin u\,\psi''), \qquad z = \mp(\psi + \psi'').$$

An Stelle von (5,4) bekommen wir die reellen Torsen

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(u,v) &= \mp i\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}[\sin u\,\psi' + \cos u\,\psi'' + v\cos u(\psi'+\psi''')] \\ x_2(u,v) &= i\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}[\cos u\,\psi' - \sin u\,\psi'' - v\sin u(\psi'+\psi''')] \\ x_3(u,v) &= \mp[\psi+\psi'' + v(\psi'+\psi''')] \end{aligned}} \quad \ldots \quad (5,5)$$

mit $\lambda + \mu(p^2+q^2) \equiv 0 \ \{u, v, \psi\}, \ \mu < 0$.

§ 6. Übergang zur Theorie der Minimalflächen.

Wir berechnen zunächst das Quadrat des Vektors $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\tau)$ nach (3,2), (3,4) und (3,5) und erhalten:

$$\mathfrak{z}^2 = \frac{g^2 \mp 2ifgW^2 - f^2W^2 + f^2 \pm 2ifgW - g^2W^2 - W^2(f^2+g^2)}{f^2+g^2} = \frac{1+f^2+g^2}{\lambda+\mu(f^2+g^2)} - 1 \quad . \quad . \quad (6,1).$$

Da $z_1(\tau) = \dfrac{g \mp ifW}{f^2+g^2}$ nicht identisch verschwindet, können wir den Vektor $\mathfrak{z}^* - \dfrac{\mathfrak{z}}{z_1}$ bilden und erhalten für seine Komponenten

$$z_1^* = 1, \quad z_2^* = -\frac{f \pm igW}{g \mp ifW}, \quad z_3^* = \mp i\frac{(f^2+g^2)W}{g \mp ifW}.$$

Für die Ableitung $z_2^{*\prime}$ ergibt sich

$$z_2^{*\prime} = -\frac{g^2\left(\frac{f}{g}\right)'(1-W^2) \pm iW'(f^2+g^2)}{(g \mp ifW)^2}.$$

Nun gilt nach (4,6)

$$g^2\left(\frac{f}{g}\right)' = \pm iW(ff' + gg').$$

Daher erhalten wir für $z_2^{*\prime}$ schließlich

$$z_2^{*\prime} = \frac{\mp i[W(1-W^2)(ff'+gg') + W'(f^2+g^2)]}{(g \mp ifW)^2} \quad \ldots \ldots \quad (6,2).$$

Wie wir einleitend erwähnt hatten, gelangen wir zur Theorie der Minimalflächen, wenn wir die Formeln unserer Untersuchung auf den Sonderfall $\lambda = \mu = 1$ spezialisieren. Aus (6,1) folgt dann zunächst $\mathfrak{z}^2 = 0$. Ferner wird jetzt

$$\pm W = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + f^2 + g^2}}, \qquad \pm W' = \frac{\mp (f f' + g g')}{(1 + f^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sodann folgt aus (6,2) das Verschwinden der Ableitung $z_2^{*\prime}$, also $z_2^* = \text{const} = -\Gamma$. Mit $\mathfrak{z}$ ist natürlich auch gleichzeitig $\mathfrak{z}^*$ ein isotroper Vektor. Somit gilt

$$\mathfrak{z}^{*2} = z_1^{*2} + z_2^{*2} + z_3^{*2} = 1 + \Gamma^2 + z_3^{*2} = 0, \qquad z_3^* = \pm i \sqrt{1 + \Gamma^2} = \text{const};$$

$$z_1 : z_2 : z_3 = 1 : -\Gamma : \pm i \sqrt{1 + \Gamma^2}$$

oder mit Rücksicht auf (3,1), (3,4) und (3,9)

$$\frac{dx}{d\sigma} : \frac{dy}{d\sigma} : \frac{dz}{d\sigma} = 1 : -\Gamma : \pm i \sqrt{1 + \Gamma^2}, \qquad \text{d. h. } g_{11} = \mathfrak{x}_\sigma^2 = 0.$$

Für die isotropen Kurven unserer Integralflächen ergibt sich jetzt [13]):

$$(2 g_{12}\, d\sigma + g_{22}\, d\tau)\, d\tau = 0,$$

für die Asymptotenkurven:

$$h_{22}\, d\tau^2 = 0,$$

für die Krümmungskurven

$$\begin{vmatrix} d\tau^2, & -d\sigma\, d\tau, & d\sigma^2 \\ 0\,, & g_{12}\,, & g_{22} \\ 0\,, & 0\,, & h_{22} \end{vmatrix} = g_{12} h_{22}\, d\tau^2 = 0.$$

Im nichtsingulären Falle ($g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \neq 0$) gewinnen wir so das Resultat: die nichtsingulären intermediären Integraltorsen (3,9) der Grundgleichung (1,1) reduzieren sich für $\lambda = \mu = 1$ auf die isotropen abwickelbaren [14]) Zylinder

$$\mathfrak{x}(\sigma, \tau) = \mathfrak{y}(\tau) + \sigma \mathfrak{z}(\tau), \quad \mathfrak{z}^2 = 0, \quad \mathfrak{y}' \mathfrak{z} \neq 0 \{\tau\}; \quad z_1 : z_2 : z_3 = 1 : -\Gamma : \pm i \sqrt{1 + \Gamma^2}; \quad K = 0 \{\sigma, \tau\}.$$

Diese Zylinder tragen zwei Scharen isotroper Kurven, dagegen nur je eine Schar von Asymptotenkurven und Krümmungskurven, die beide mit der einen (geradlinigen) Schar der isotropen Flächenkurven zusammenfallen und die Charakteristiken des Differentialproblems darstellen.

Wie man nach (4,4) leicht überprüft, geht die Relativnormale $\mathfrak{e}$ für $\lambda = \mu = 1$ in die Flächeneinheitsnormale $\mathfrak{n}$ über und daher nach (4,3) die mittlere Relativkrümmung H^* in die mittlere Krümmung H. Wegen $H = K = 0$ haben wir damit die bekannten abwickelbaren Mongeschen Minimalregelflächen [15]) gewonnen.

Im singulären Falle ($g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = 0$) gehen wir von der Differentialgleichung (2,5) aus und gewinnen für $\lambda = \mu = 1$:

$$1 + p^2 + q^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6{,}3)$$

und daher nach (5,1) die Mongesche Gleichung

$$1 + y'^2 + z'^2 = 0$$

des isotropen Komplexes. Das vollständige Integral (5,2) ist jetzt für die Differentialgleichung (6,3) durch eine zweiparametrige isotrope Ebenenschar gegeben ($a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$). Aus (5,3) entsteht die bekannte integrallose Darstellung der Kurven des isotropen Komplexes [16]), aus (5,4) und (5,5) ebenso die der isotropen Torsen. Da jetzt $\mu > 0$, sind beide Darstellungen der Integralflächen (und diese selbst) komplex.

[13]) Vgl. [3], Kap. IV, § 41, 52, 46; S. 87, 106, 94.

[14]) Für diese Abwickelbarkeit ist die Voraussetzung $g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \neq 0$ wesentlich!

[15]) Vgl. L. Berwald: Sitz.-Ber. Akad. München 1913, S. 143 bis 211.

[16]) Vgl. [6], Kap. I, § 23, S. 45 bis 46.

Die integrablen Kombinationen der Charakteristikensysteme (1,3a, b) führen in der Theorie der Minimalflächen, d. h. für die Differentialgleichung (1,6) bekanntlich auf ein Clairautsches Differentialgleichungspaar mit dem allgemeinen Integral[17])

$$p = a\,q \mp i\sqrt{1+a^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6{,}4),$$

das wir als einparametrige Geradenschar in der Ebene der Koordinaten p und q deuten. Setzen wir in der Differentialgleichung (2,1) $\lambda = \mu = 1$, so entsteht

$$\operatorname{arctg}\frac{p}{q} = \pm i \int\limits_{\sqrt{p_0^2+q_0^2}}^{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1+\varrho^2}} + \text{const} = \mp i \lg \frac{1+\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} + a^*.$$

Gehen wir zu zyklometrischen Funktionen über, so ergibt sich:

$$\operatorname{arctg}\frac{p}{q} = \mp \arcsin\frac{i}{\sqrt{p^2+q^2}} + a^*, \qquad \frac{\pm i}{\sqrt{p^2+q^2}} = \sin\left[\operatorname{arctg}\frac{p}{q} - a^*\right].$$

Daraus folgt

$$p\cos a^* - q\sin a^* = \mp i$$

und diese lineare Relation in p und q wird mit (6,4) identisch, wenn wir die Integrationskonstante $a^* = \operatorname{arctg} a$ setzen. Differenzieren wir (6,4) nach a, so bekommen wir aus $a = \mp i\,q\,(1+q^2)^{-\frac{1}{2}}$ und (6,4) die Relation (6,3), d. h. das singuläre Integral des oben erwähnten Clairautschen Gleichungspaares. Auch so erscheint daher unsere Terminologie singulärer Integrale gerechtfertigt[18]).

Zusatz bei der Korrektur: Die Integration der intermediären Differentialgleichungen (2, 4a, b) nach der Lagrangeschen Methode und eine Untersuchung über die physikalische Natur der intermediären Strömungen erscheint demnächst in einer Arbeit von H. Behrbohm.

Schriftenverzeichnis.

[1] H. Behrbohm und M. Pinl: Zur Theorie der kompressiblen Potentialströmungen I. Neue Linearisierung der Grundgleichung der ebenen adiabatisch kompressiblen Potentialströmung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 193 bis 203. Auch die dem Geschwindigkeitspotential zugeordnete Stromfunktion wurde neuerdings mehrfach verwendet. Vgl. F. Ringleb, Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 185 bis 198; F. Ringleb, Über die Differentialgleichung einer adiabatischen Gasströmung und den Strömungsstoß, Dtsch. Mathematik 1940, 5/5, S. 377 bis 384; W. Damköhler und H. Grell, Zur Integration der stationären ebenen adiabatischen Gasströmung, Vortrag von H. Grell auf der Arbeitstagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Jena 1941, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung *Jahrgang 1942*; W. Tollmien, Grenzlinien adiabatischer Potentialströmungen, Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 140 bis 152.

[2] A. Steichen: Beiträge zur Theorie der zweidimensionalen Bewegungsvorgänge in einem Gase, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt. Diss. Göttingen 1909, § 5; S. 6 bis 7.

[3] W. Blaschke: Differentialgeometrie. Bd. I, 3. Aufl., Berlin 1930.

[4] E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre I, II. Paris 1896, 1898.

[5] E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1921.

[6] R. Courant-D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik. Bd. II, Berlin 1937.

[7] G. Boole: A Treatise of Diff. Equations. Cambridge 1859.

[8] A. Duschek: Sitzungsberichte Akad. Wien IIa, Bd. 135 (1926), S. 1 bis 8, Bd. 136 (1927), S. 265 bis 270.

[9] L. Berwald: Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen, Mh. Math. Phys. Bd. 38 (1931), S. 89 bis 108.

[10] M. Pinl: Zur geometrischen Deutung und Transformation der Grundgleichung der ebenen kompressiblen Potentialströmung, Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 80 bis 85. 309

[17]) Vgl. [4], Bd. I, Kap. II, § 50, S. 101; §§ 56, 57, 58, S. 110 bis 123.

[18]) Vgl. [4], Bd. I, Kap. I, § 18, S. 28 bis 29; Kap. II, § 37, S. 373 bis 74; § 50, S. 99 bis 101

XUM

Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft.

Von *Wilhelm Schmidt* in Bochum.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

II. Teil*)

Das rotationssymmetrische Problem.

Wir denken uns die Luft, die wieder durch ihre Dichteunterschiede gegen die ruhende Luft in Bewegung gesetzt wird, und die keinen Anfangsimpuls mitbringt, von einer kreisförmigen Wärmequelle aufsteigend. Die x-Achse legen wir in Richtung der Strömung, die y-Achse senkrecht dazu.

Die Auftriebskraft, die die Strömung hervorruft, ist

$$g\,\varrho\,\beta\,\vartheta .$$

Hier gilt genau wie im ebenen Fall die erste Frage der Abhängigkeit des Mischungsweges, der Geschwindigkeit und der Temperatur von der Entfernung von der Wärmequelle. Der Mischungsweg erweist sich entsprechend der Prandtlschen Abschätzung

$$\frac{D b}{d t}=u \frac{d b}{d x}=\frac{l u}{b},$$

$$\frac{d b}{d x}=\text{konst.},$$

$$b=r\cdot x \quad \text{und} \quad l=c x$$

als dem Abstand vom Ausfluß und damit auch der Strahlbreite direkt proportional.

Um die Abhängigkeit der Temperatur und der Geschwindigkeit vom Abstand von der Wärmequelle zu finden, machen wir die Ansätze $\vartheta=D x^{-m}$ und $u=W\cdot x^{p}$ mit den zunächst noch unbestimmten Exponenten m und p und den willkürlichen Konstanten D und W, die lediglich bewirken sollen, daß die Ansätze dimensionsrichtig sind. Die Wärmetransportgleichung liefert uns nun einen ersten und der Impulssatz einen zweiten Zusammenhang zwischen den unbekannten Koeffizienten m und p.

Wir machen wieder die Voraussetzung, daß der Wärmetransport durch die einzelnen Querschnitte konstant ist:

$$W=\varrho\,\pi\,b^{2}\,u\,c_{p}\,\vartheta=\text{konst.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

In dieser Gleichung wird ϱ durch ϱ_0 ersetzt (s. S. 269) und die Ansätze für u und ϑ werden eingeführt, so daß wir als erste Bestimmungsgleichung für m und p erhalten

$$2+p=m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36).$$

Die zweite Bestimmungsgleichung ist eine Folgerung aus dem Impulssatz. Der Impuls wird, wenn auch hier ϱ durch ϱ_0 ersetzt wird,

$$J=\pi\,b^{2}\,\varrho\,u^{2}\sim x^{2+2p}$$

und die Impulsänderung

$$\frac{dJ}{dx}\sim x^{2p+1}.$$

Die Auftriebskraft ist

$$\pi\,b^{2}\,\beta\,g\,\varrho\,\vartheta\sim x^{-m+2}.$$

Der Impulssatz: Auftriebskraft = Impulsänderung liefert

$$x^{-m+2}\sim x^{2p+1}$$

und daraus als zweite Bestimmungsgleichung für m und p

$$m=1-2p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37).$$

Aus den beiden Bestimmungsgleichungen errechnen sich m und p:

$$m=\frac{5}{3} \quad \text{und} \quad p=-\frac{1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

Unter Einführung der Dimensionslosen $\eta=\frac{y}{x}$ bekommen wir für die Geschwindigkeit und die Temperatur die Ansätze

*) Vgl. den I. Teil in Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941) Heft 5 S. 265 bis 278.

XUM

$$u = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} f(\eta) \quad \text{(39a)},$$

$$\vartheta = \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \Theta(\eta) \quad \text{(39b)}.$$

Zur Ermittlung der Funktionen u, v und Θ stehen wieder drei Gleichungen, die Bewegungsgleichung, die Kontinuitätsgleichung und die Wärmetransportgleichung zur Verfügung.

Bewegungsgleichung:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \beta g \vartheta + \frac{1}{y} l^2 \frac{\partial}{\partial y}\left[y \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right] \quad \text{(40)},$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u y) + \frac{\partial}{\partial y}(v y) = 0 \quad \text{(41)},$$

Wärmetransportgleichung:

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{y} l^2 \left[y \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right] \quad \text{(42)}.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten u und v sind durch die Kontinuitätsgleichung miteinander verknüpft. Aus u kann v bestimmt werden. Nach dem Ansatz (39a) ist

$$u = x^{-\frac{1}{3}} f(\eta)$$

und

$$u y = \eta x^{\frac{2}{3}} f(\eta).$$

Setzen wir

$$\int \eta f(\eta) \, d\eta = F(\eta),$$

dann wird

$$\eta f(\eta) = F'(\eta)$$

und

$$u y = x^{\frac{2}{3}} F'(\eta),$$

demnach

$$u = x^{-\frac{1}{3}} \frac{F'(\eta)}{\eta} \quad \text{(43)}.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung gewinnt man mit diesem Ausdruck für u die Geschwindigkeitskomponente v. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\frac{2}{3}} F'\right) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} F' - x^{\frac{2}{3}} F'' \frac{\eta}{x}.$$

Durch Integration nach y folgt daraus

$$\begin{aligned} v y &= x^{-\frac{1}{3}} \int F'' \eta \, d y - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \int F' \, d y \\ &= x^{\frac{2}{3}} \int F'' \eta \, d\eta - \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} \int F' \, d\eta \\ &= x^{\frac{2}{3}} (F'' \eta - F) - \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} F \\ &= x^{\frac{2}{3}}\left(F' - \frac{5}{3}\frac{F}{\eta}\right), \end{aligned}$$

also

$$v = x^{-\frac{1}{3}}\left(F' - \frac{5}{3}\frac{F}{\eta}\right) \quad \text{(44)}.$$

Wir multiplizieren nun die Wärmetransportgleichung mit βg und bezeichnen das Produkt $\beta g \Theta$ mit Θ_0.

Um nur Gleichungen zwischen dimensionslosen Größen zu haben, nehmen wir eine Dimensionsbefreiung vor, indem wir setzen

$$F = U_s \sqrt[5]{\Theta_s \beta}\, \Phi; \quad F' = U_s \sqrt[5]{\Theta_s \beta}\, \Phi'; \quad F'' = U_s \sqrt[5]{\Theta_s \beta}\, \Phi'';$$

$$\Theta_0 = U_s^2 \sqrt[5]{(\Theta_s \beta)^2}\, \Theta_1; \quad \Theta_0' = U_s^2 \sqrt[5]{(\Theta_s \beta)^2}\, \Theta_1'; \quad \Theta_0'' = U_s^2 \sqrt[5]{(\Theta_s \beta)^2}\, \Theta_1'';$$

$$u = \frac{U_s}{x^{\frac{1}{3}} \eta} \sqrt[5]{\Theta_s \beta}\, \Phi'; \quad v = \frac{U_s}{x^{\frac{1}{3}}} \sqrt[5]{\Theta_s \beta}\left(\Phi' - \frac{5}{3}\frac{\Phi}{\eta}\right); \quad \vartheta = \frac{U_s^2}{x^{\frac{5}{3}} \beta g} \sqrt[5]{(\Theta_s \beta)^2}.$$

U_s ist die in irgendeiner Entfernung s von der Wärmequelle in der Strahlmitte gemessene Geschwindigkeit. Im gleichen Punkt ist auch die Temperatur ϑ_s zu messen, mit der dann auch Θ_s bekannt ist. Mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_s \sqrt[5]{\Theta_s \beta} \left(\frac{2}{3} \frac{\Phi'}{\eta x^{\frac{4}{3}}} - \frac{\Phi''}{x^{\frac{4}{3}}} \right); \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = U_s \sqrt[5]{\Theta_s \beta} \left(\frac{\Phi''}{x^{\frac{4}{3}} \eta} - \frac{\Phi'}{x^{\frac{4}{3}} \eta^2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_s \sqrt[5]{\Theta_s \beta}}{x^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{\Phi'''}{\eta} - \frac{2\Phi''}{\eta^2} + \frac{2\Phi'}{\eta^3} \right)$$

und

$$\tau'_{xy} = - U_s^2 \sqrt[5]{(\Theta_s \beta)^2} \cdot \frac{\varrho c^2}{x^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{\Phi''}{\eta} - \frac{\Phi'}{\eta^2} \right)^2$$

lautet die Bewegungsgleichung

$$\left.\begin{aligned} & 5\Phi\Phi'\eta^2 - 5\Phi\Phi''\eta^3 - \Phi'^2\eta^3 \\ & \quad + 3c^2\{6\Phi'\Phi''\eta + 2\Phi''\Phi'''\eta^3 - 3\Phi''^2\eta^2 - 3\Phi'^2 - 2\Phi'\Phi'''\eta^2\} = 3\beta g \eta^5 \Theta_1 \end{aligned}\right\} \quad . \text{(45a)}$$

und mit

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = - \frac{U_s^2 \sqrt[5]{(\Theta_s \beta)^2}}{\beta g} \left(\frac{5}{3} \frac{\Theta_1}{x^{\frac{8}{3}}} + \eta \frac{\Theta_1'}{x^{\frac{8}{3}}} \right); \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{U_s^2 \sqrt[5]{(\Theta_s \beta)^2}}{\beta g} \cdot \frac{\Theta_1'}{x^{\frac{8}{3}}}; \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \frac{U_s^2 \sqrt[5]{(\Theta_s \beta)^2}}{\beta g} \frac{\Theta_1''}{x^{\frac{11}{3}}}$$

und

$$\varkappa = - \frac{U_s^3 \sqrt[5]{(\Theta_s \beta)^3}}{\beta g} \frac{c^2}{x^2} \left(\frac{\Phi''}{\eta} - \frac{\Phi'}{\eta^2} \right) \Theta_1' c_p,$$

die Wärmetransportgleichung

$$3c^2(5\Phi'\Theta_1\eta^2 + 5\Phi\Theta_1'\eta^2 + \Phi'\Theta_1''\eta + \Phi''\Theta_1'\eta - \Phi''\Theta_1''\eta^2 - \Phi'''\Theta_1'\eta^2 - \Phi'\Theta_1') = 0 \quad . \quad . \text{(46a)}.$$

Um den Faktor $3c^2$ auf der linken Seite von (45a) und (46a) zu beseitigen, machen wir die Substitution

$$\eta_1 = \alpha \eta \qquad \text{mit} \qquad \alpha = (3c^2)^{-\frac{1}{3}}$$

und erhalten das Differentialgleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} & 5\Phi\Phi'\eta_1^2 - 5\Phi\Phi''\eta_1^3 - \Phi'^2\eta_1^3 + 6\Phi'\Phi''\eta_1 + 2\Phi''\Phi'''\eta_1^3 \\ & \quad - 3\Phi''^2\eta_1^2 - 3\Phi'^2 - 2\Phi'\Phi''' = 3\sqrt[3]{(3c^2)^2}\,\Theta_1\eta_1^5 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(45b)},$$

$$5\Phi'\Theta_1\eta_1^2 + 5\Phi\Theta_1'\eta_1^2 + \Phi'\Theta_1''\eta_1 + \Phi''\Theta_1'\eta_1 - \Phi''\Theta_1''\eta_1^2 - \Phi'''\Theta_1'\eta_1^2 - \Phi'\Theta_1' = 0 \quad . \quad . \quad . \text{(46b)}.$$

Wird noch Gl. (46b) mit $(3c^2)^{\frac{2}{3}}$ multipliziert und das Produkt $(3c^2)^{\frac{2}{3}}\Theta_1$ mit Θ_2 bezeichnet, so nehmen unsere Differentialgleichungen die endgültige Form

$$5\Phi\Phi'\eta_1^2 - 5\Phi\Phi''\eta_1^3 - \Phi'^2\eta_1^3 + 6\Phi'\Phi''\eta_1 + 2\Phi'\Phi''\eta_1^3 - 3\Phi''^2 - 3\Phi'^2 - 2\Phi'\Phi''' = 3\eta_1^5\Theta_2 \text{ (45c)},$$

$$5\Phi'\Theta_2\eta_1^2 + 5\Phi'\Theta_2'\eta_1^2 + \Phi'\Theta_2''\eta_1 + \Phi''\Theta_2'\eta_1 - \Phi''\Theta_2''\eta_1^2 - \Phi'''\Theta_2'\eta_1^2 - \Phi'\Theta_2' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(46c)}$$

an. Zu diesen Differentialgleichungen kommen noch die Randbedingungen hinzu. Wenn wir die dimensionslosen Geschwindigkeiten mit u_1 und v_1 bezeichnen, lauten diese:

1. für die Mitte des Strahls

   $\Theta_2 = 1,$
   $u_1 =$ endlich d. h. $\Phi' = 0,$
   $v_1 = 0$ d. h. $\Phi = 0.$

Φ muß Null werden wie η_1^2. Nur dann hat u_1 in der Mitte einen endlichen Wert.

2. für den Strahlrand $\eta_1 = \eta_{1R}$:

   $\Theta_2 = 0,$
   $\Theta_2' = 0$ (wegen der Stetigkeit des Anschlusses nach außen),
   $u_1 = 0$ d. h. $\Phi' = 0,$
   $\frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} = 0$ d. h. $\Phi'' = 0$ (ebenfalls wegen der Stetigkeit des Anschlusses).

Die Lösung des Differentialgleichungssystems in geschlossener Form ist nicht möglich, sondern muß durch Reihenansätze erfolgen, in denen die beim ebenen Problem erwähnte Singularität zu berücksichtigen ist.

Die Ansätze lauten demgemäß:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi &= a_0\,\eta_1^2 + a_1\,\eta_1^{\frac{7}{2}} + a_2\,\eta_1^5 + a_3\,\eta_1^{\frac{13}{2}} + a_4\,\eta_1^8 + a_5\,\eta_1^{\frac{19}{2}} + \cdots \\
\Theta_2 &= 1 + b_1\,\eta_1^{\frac{3}{2}} + b_2\,\eta_1^3 + b_3\,\eta_1^{\frac{9}{2}} + b_4\,\eta_1^6 + b_5\,\eta_1^{\frac{15}{2}} + \cdots \\
u_1 &= 2\,a_0 + \frac{7}{2}\,a_1\,\eta_1^{\frac{3}{2}} + 5\,a_2\,\eta_1^3 + \frac{13}{2}\,a_3\,\eta_1^{\frac{9}{2}} + 8\,a_4\,\eta_1^6 + \frac{19}{2}\,a_5\,\eta_1^{\frac{15}{2}} + \cdots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (47\text{a}).$$

Werden diese Ansätze in die Differentialgleichungen eingesetzt, dann ergeben sich für die Koeffizienten die folgenden Bestimmungsgleichungen

$$-4\,a_0^2 + \frac{441}{8}\,a_1^2 = 3$$

$$-\frac{161}{4}\,a_0\,a_1 + \frac{2205}{4}\,a_1\,a_2 = 3\,b_1$$

$$-95\,a_0\,a_2 - \frac{77}{2}\,a_1^2 + \frac{12285}{8}\,a_1\,a_3 + 1125\,a_2^2 = 3\,b_2$$

$$-\frac{689}{4}\,a_0\,a_3 - \frac{545}{4}\,a_1\,a_2 + 3276\,a_1\,a_4 + \frac{22815}{4}\,a_2\,a_3 = 3\,b_3$$

$$-272\,a_0\,a_4 - 218\,a_1\,a_3 - 100\,a_2^2 + 5985\,a_1\,a_5 + 11520\,a_2\,a_4 + \frac{13689}{2}\,a_3^2 = 3\,b_4$$

$$-1577\,a_0\,a_5 - 1289\,a_1\,a_4 - 1145\,a_2\,a_3 + 39501\,a_1\,a_6 + 81225\,a_2\,a_5 + 106704\,a_3\,a_4 = 12\,b_6\,,$$

$$10\,a_0\,b_0 - \frac{63}{4}\,a_1\,b_1 = 0$$

$$\frac{35}{2}\,a_1\,b_0 + \frac{35}{2}\,a_0\,b_1 - \frac{441}{8}\,a_1\,b_2 - \frac{315}{4}\,a_2\,b_1 = 0$$

$$25\,a_0\,b_2 + 25\,a_1\,b_1 + 25\,a_2\,b_0 - \frac{945}{8}\,a_1\,b_3 - 225\,a_2\,b_2 - \frac{1755}{8}\,a_3\,b_1 = 0$$

$$\frac{65}{2}\,a_0\,b_3 + \frac{65}{2}\,a_1\,b_2 + \frac{65}{2}\,a_2\,b_1 + \frac{65}{2}\,a_3\,b_0 - \frac{819}{4}\,a_1\,b_4 - \frac{1755}{4}\,a_2\,b_3 - \frac{4563}{8}\,a_3\,b_2 - 468\,a_4\,b_1 = 0$$

$$\begin{aligned}40\,a_0\,b_4 + 40\,a_1\,b_3 + 40\,a_2\,b_2 + 40\,a_4\,b_0 - 315\,a_1\,b_5 - 720\,a_2\,b_4 - 1053\,a_3\,b_5 - 1152\,a_4\,b_2 \\ + 40\,a_3\,b_1 - 850\,a_5\,b_1 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{95}{2}\,a_0\,b_5 + \frac{95}{2}\,a_1\,b_4 + \frac{95}{2}\,a_2\,b_3 + \frac{95}{2}\,a_3\,b_2 + \frac{95}{2}\,a_4\,b_1 + \frac{95}{2}\,a_5\,b_0 - \frac{3591}{8}\,a_1\,b_6 - \frac{4275}{4}\,a_2\,b_5 \\ - 6669\,a_3\,b_4 - 2024\,a_4\,b_3 - \frac{16245}{8}\,a_5\,b_2 - \frac{5543}{4}\,a_6\,b_1 = 0\,.\end{aligned}$$

Daraus berechnen sich die ersten Koeffizienten

$$a_0; \qquad a_1 = -\frac{2}{21}\sqrt{6 + a_0^2}\,, \qquad a_2 = \frac{258\,a_0 + 184\,a_0^3}{315\,(6 + 8\,a_0^2)}\,;$$

$$a_3 = -\frac{1{,}6333\,a_0^6 + 4{,}7884\,a_0^4 + 1{,}775\,a_0^2 + 0{,}7218}{(6 + 8\,a_0^2)^{\frac{5}{2}}}\,;$$

$$a_4 = \frac{2{,}2105\,a_0^9 + 10{,}2863\,a_0^7 + 5{,}9497\,a_0^5 + 19{,}1838\,a_0^3 + 0{,}89}{6 + 8\,a_0^2}\,;$$

$$b_0 = 1\,; \qquad b_1 = -\frac{20\,a_0}{\sqrt[3]{6 + 8\,a_0^2}}\,; \qquad b_2 = \frac{8800\,a_0^4 + 5160\,a_0^2 + 720}{63\,(6 + 8\,a_0^2)^2}\,;$$

$$b_3 = -\frac{1444{,}539\,a_0^7 + 1315{,}539\,a_0^5 + 1029{,}805\,a_0^3 + 217{,}776\,a_0}{(6 + 8\,a_0^2)^{\frac{7}{2}}}\,.$$

Die übrigen Koeffizienten wurden nicht explizit dargestellt, sondern durch Einsetzen der bereits berechneten in die Bestimmungsgleichungen gewonnen.

Aus $u_1(\eta_{1R}) = 0$ und $\frac{d\,u_1(\eta_{1R})}{d\,\eta_1} = 0$ erhält man für a_0 und η_{1R} ungefähre Werte. Es zeigte sich, daß a_0 in der Nähe von 0,54 zwischen 0,54 und 0,55 liegen muß. Ein verbesserter Wert von a_0 ist 0,5405. Für η_{1R} ergab sich 2,1. Damit werden die Koeffizienten

$$a_0 = 0{,}5405; \quad a_1 = -0{,}2749912; \quad a_2 = 0{,}0641625;$$

$$a_3 = -0{,}0085605; \quad a_4 = 0{,}000814919; \quad a_5 = -0{,}000055042; \quad a_6 = 0{,}00000308857$$

und

$$b_0 = 1; \quad b_1 = -1{,}247977; \quad b_2 = 0{,}6801786; \quad b_3 = -0{,}222;$$

$$b_4 = 0{,}04995135; \quad b_5 = -0{,}00834187; \quad b_6 = 0{,}001099833.$$

Die Konvergenz der Reihenentwicklungen um den Nullpunkt wird bei Annäherung an den Randpunkt schlecht. Wir können aber wieder eine Entwicklung um den Randpunkt angeben, die gerade in dessen Umgebung gut verwendbar ist. Wir setzen:

$$\bar{\eta}_1 = \eta_{1R} - \eta_1$$

und erhalten als Lösungsansätze für Φ, u_1 und Θ

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \bar{a}_0 + \bar{a}_3\,\bar{\eta}_1^3 + \bar{a}_4\,\bar{\eta}_1^4 + \bar{a}_5\,\bar{\eta}_1^5 + \bar{a}_6\,\bar{\eta}_1^6 + \cdots \\ u_1 &= \frac{1}{\eta_{1R} - \bar{\eta}_1}\{-3\,\bar{a}_3\,\bar{\eta}_1^2 - 4\,\bar{a}_4\,\bar{\eta}_1^3 - 5\,\bar{a}_5\,\bar{\eta}_1^4 - \cdots\} \\ \Theta_2 &= \bar{b}_2\,\bar{\eta}_1^2 + \bar{b}_3\,\bar{\eta}_1^3 + \bar{b}_4\,\bar{\eta}_1^4 + \bar{b}_5\,\bar{\eta}_1^5 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (47\,\mathrm{b}).$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten. Daraus bestimmen sich diese wie folgt:

$$\bar{a}_0; \qquad \bar{a}_3 = -\frac{5}{12}\,\bar{a}_0; \qquad \bar{a}_4 = \frac{25\,\bar{a}_0^2 + 4\,\bar{b}_2\,\eta_{1R}^3}{160\,\bar{a}_0\,\eta_{1R}};$$

$$\bar{a}_5 = \frac{5625\,\bar{a}_0^4 - 2400\,\bar{a}_0^2\,\bar{b}_2\,\eta_{1R}^3 + 432\,\bar{b}_2^2\,\eta_{1R}^6}{120000\,\bar{a}_0^3\,\eta_{1R}};$$

$$\bar{b}_2 = 1; \qquad \bar{b}_3 = \frac{25\,\bar{a}_0^2\,\bar{b}_2 + 12\,\bar{b}_2^2\,\eta_{1R}^3}{50\,\bar{a}_0^2\,\eta_{1R}}; \qquad \bar{b}_4 = \frac{625\,\bar{a}_0^4\,\bar{b}_2 + 120\,\bar{a}_0^2\,\bar{b}_2^2\,\eta_{1R}^3 + 144\,\bar{b}_2\,\eta_{1R}^6}{2000\,\bar{a}_0^4\,\eta_{1R}^2};$$

$$\bar{b}_5 = \frac{514275\,\bar{a}_0^6\,\bar{b}_2 + 858500\,\bar{a}_0^4\,\bar{b}_2^2\,\eta_{1R}^3 - 32400\,\bar{a}_0^4\,\bar{b}_2^3\,\eta_{1R}^6 + 91584\,\bar{b}_2^4\,\eta_{1R}^4 - 843760\,\bar{a}_0^6\,\bar{b}_2\,\eta_{1R}^3}{4500000\,\bar{a}_0^6\,\eta_{1R}^6}.$$

Läßt man die Entwicklungen um den Nullpunkt und den Randpunkt in einem Anschlußpunkt ($\eta_1 = 1{,}6$) übereinstimmen, dann berechnen sich die Unbekannten der letzten Entwicklungen zu

$$\bar{a}_0 = 0{,}5057; \qquad \bar{b}_2 = 0{,}093; \qquad \bar{\eta}_1 = 0{,}51.$$

Mit diesen Werten erhalten wir für die Koeffizienten der Entwicklungen um den Randpunkt die Werte

$$\bar{a}_0 = 0{,}5057; \quad \bar{a}_3 = -0{,}2107; \quad \bar{a}_4 = 0{,}058063; \quad \bar{a}_5 = 0{,}00496;$$

$$\bar{b}_2 = 1; \qquad \bar{b}_3 = 0{,}0581; \qquad \bar{b}_4 = 0{,}02836.$$

Der genauere Wert des Randpunktes η_{1R} ist 2,11. Die Lösungen der Differentialgleichungen erhalten damit die Form:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= 0{,}5405\,\eta_1^2 - 0{,}2749912\,\eta_1^{\frac{7}{2}} + 0{,}0641625\,\eta_1^5 - 0{,}00856053\,\eta_1^{\frac{13}{2}} + \cdots \\ u_1 &= 1{,}081 - 0{,}962469\,\eta_1^{\frac{3}{2}} + 0{,}32081\,\eta_1^3 - 0{,}0556435\,\eta_1^{\frac{9}{2}} + \cdots \\ \Theta_2 &= 1 - 1{,}247948\,\eta_1^{\frac{3}{2}} + 0{,}6801786\,\eta_1^3 - 0{,}222\,\eta_1^{\frac{9}{2}} + 0{,}0499514\,\eta_1^6 - \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (48\,\mathrm{a})$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= 0{,}5057 - 0{,}2107\,\bar{\eta}_1^3 + 0{,}058063\,\bar{\eta}_1^4 + 0{,}00496\,\bar{\eta}_1^5 + \cdots \\ u_1 &= \{0{,}6321\,\bar{\eta}_1^2 - 0{,}232252\,\bar{\eta}_1^3 - 0{,}0248\,\bar{\eta}_1^4 - \cdots\}\,\frac{1}{2{,}11 - \bar{\eta}_1} \\ \Theta_2 &= \bar{\eta}_1^2 + 0{,}0581\,\bar{\eta}_1^3 + 0{,}02836\,\bar{\eta}_1^4 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad (48\,\mathrm{b}).$$

In Zahlentafel 5 sind die Werte von Φ, u_1, v_1 und Θ_2 angegeben. Wenn der Maßstab der Geschwindigkeit wieder so geändert wird, daß die Scheitel des Geschwindigkeits- und des Auftriebsprofils zusammenfallen, erhalten wir die in Bild 5 dargestellten Profile.

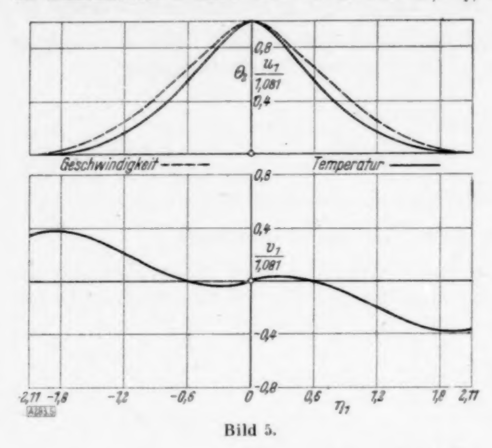


Bild 5.

Das Temperaturprofil sinkt schneller ab, als das Geschwindigkeitsprofil. Die Quergeschwindigkeit hat ihr Maximum nicht am Rande selbst, sondern etwas vom Rande entfernt im Inneren des Strahls.

Berechnung der Druckunterschiede. Auch hier war in erster Näherung vorausgesetzt worden, daß der Druck in den Querschnitten senkrecht zur Strömungsrichtung konstant ist. In zweiter Näherung sollen die Druckunterschiede berechnet werden. Wir gehen aus von der zweiten Bewegungsgleichung

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial(\sigma_y\cdot y)}{\partial y}-\frac{\sigma_t}{y}\right)-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad \ldots \ldots \quad (49).$$

In dieser Gleichung sind neben der scheinbaren Schubspannung die Normal- und Tangentialspannung berücksichtigt, die sich aus dem Tensor

$$l^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|(\nabla\mathfrak{v}+\mathfrak{v}\nabla) \quad \ldots \ldots \quad (50).$$

bestimmen. Die anderen neu hinzuzufügenden Spannungen können vernachlässigt werden Für σ_y und σ_t ergeben sich aus dem Tensor die Größen

$$\sigma_y=2\,l^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \sigma_t=2\,l^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\frac{v}{y}.$$

σ_y wechselt, da es das Vorzeichen von $\frac{\partial v}{\partial y}$ annimmt, zweimal sein Vorzeichen, σ_t, das das Vorzeichen von v hat, dagegen nur einmal.

Zahlentafel 5.

η_1	Θ_2	Φ	Φ'	u_1	$\left(\frac{u_1}{1,081}\right)$[1]	v_1	$\left(\frac{v_1}{1,081}\right)$[1]
0	1	0	0	1,081	(1)	0	(0)
0,1	0,9612	0,00532	0,1078	1,0775	(0,9751)	0,018	(0,01665)
0,2	0,8937	0,0207	0,1995	0,9974	(0,9227)	0,0273	(0,02529)
0,3	0,808	0,0466	0,2785	0,9284	(0,8588)	0,027	(0,02498)
0,4	0,7244	0,07598	0,3432	0,8579	(0,7937)	0,026	(0,024)
0,5	0,6345	0,1127	0,3892	0,7785	(0,7201)	0,0135	(0,01245)
0,6	0,5468	0,1533	0,418	0,6967	(0,6445)	— 0,0077	(— 0,00712)
0,7	0,463	0,1967	0,43185	0,617	(0,5708)	— 0,036	(— 0,033)
0,8	0,386	0,2412	0,4303	0,5379	(0,4976)	— 0,07	(— 0,067)
0,9	0,3154	0,2815	0,4145	0,4605	(0,426)	— 0,1069	(— 0,099)
1	0,2529	0,3219	0,3897	0,3897	(0,3605)	— 0,1508	(— 0,1395)
1,1	0,19995	0,3595	0,356	0,3237	(0,2985)	— 0,1886	(— 0,1745)
1,2	0,1518	0,3926	0,3134	0,2612	(0,2416)	— 0,233	(— 0,2158)
1,3	0,1128	0,415	0,2656	0,2043	(0,189)	— 0,2677	(— 0,2476)
1,4	0,0808	0,44605	0,2202	0,1573	(0,1455)	— 0,311	(— 0,2877)
1,5	0,0563	0,4658	0,1729	0,1153	(0,1067)	— 0,3447	(— 0,3188)
1,6	0,0373	0,4808	0,1277	0,0798	(0,0738)	— 0,373	(— 0,3451)
1,7	0,02285	0,4913	0,0846	0,04978	(0,0461)	— 0,3956	(— 0,366)
1,8	0,0121	0,4978	0,0524	0,0291	(0,027)	— 0,409	(— 0,3784)
1,9	0,00512	0,5026	0,0255	0,0134	(0,0124)	— 0,416	(— 0,385)
2	0,00132	0,5034	0,0073	0,00365	(0,0033)	— 0,4122	(— 0,381)
2,11	0	0,5057	0	0	(0)	— 0,399	(— 0,369)

[1] Die eingeklammerten Zahlen sind die auf die Scheitelhöhe 1 umgerechneten Geschwindigkeiten.

Durch Integration der zweiten Bewegungsgleichung nach y erhalten wir

$$-\frac{1}{\varrho}[p]_0^y=[v^2]_0^y+\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^y u\,v\,\mathrm{d}\,y+\int\limits_0^y\frac{v^2}{y}\mathrm{d}\,y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^y\tau'_{xy}\,\mathrm{d}\,y+[\sigma_y]_0^y+\int\limits_0^y\frac{\sigma_y}{y}\mathrm{d}\,y-\int\limits_0^y\frac{\sigma_t}{y}\mathrm{d}\,y.$$

Setzt man in diese Gleichung für u, v, τ'_{xy}, σ_y und σ_t ihre Werte ein, dann erhält man durch partielle Integration für die einzelnen Summanden die Größen:

$$[v^2]_0^\eta=\left[\frac{U_s^2}{x^{\frac{2}{3}}}\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}\left(\Phi'^2-\frac{10}{3}\frac{\Phi\Phi'}{\eta}+\frac{25}{9}\frac{\Phi^2}{\eta^2}\right)\right]_0^\eta$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^y u\,v\,\mathrm{d}\,y+\int\limits_0^y\frac{v^2}{y}\mathrm{d}\,y=\frac{U_s^2\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}\left\{\left[\frac{15}{9}\frac{\Phi\Phi'}{\eta}-\frac{25}{18}\frac{\Phi^2}{\eta^2}-\Phi'^2\right]_0^\eta+\frac{4}{3}\int\limits_0^\eta\frac{\Phi'^2}{\eta}\mathrm{d}\,\eta-\frac{10}{9}\int\limits_0^\eta\frac{\Phi\Phi'}{\eta^2}\mathrm{d}\,\eta\right\}$$

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^y\tau'_{xy}\,\mathrm{d}\,y=\frac{3c^2U_s^2\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}\int\limits_0^\eta\left(\frac{10}{9}\frac{\Phi''^2}{\eta^2}-\frac{20}{9}\frac{\Phi'\Phi''}{\eta^3}+\frac{2\,\Phi'\Phi'''}{\eta^2}-\frac{2\,\Phi''\Phi'''}{\eta}+\frac{10}{3}\frac{\Phi'^2}{\eta^4}\right)\mathrm{d}\,\eta$$

$$=\frac{3c^2U_s^2\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}\left\{\left[\frac{2}{3}\frac{\Phi'\Phi''}{\eta^2}-\frac{4}{9}\frac{\Phi'^2}{\eta^3}-\frac{\Phi''^2}{3\eta}\right]_0^\eta-\frac{1}{9}\int\limits_0^\eta\frac{\Phi'^2}{\eta^2}\mathrm{d}\,\eta-\frac{2}{9}\int\limits_0^\eta\frac{\Phi'^2}{\eta^4}\mathrm{d}\,\eta\right\}$$

$$-\frac{1}{\varrho}\int\limits_0^y\frac{\sigma_y}{y}\mathrm{d}\,y=\mp\frac{3c^2U_s^2\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}\int\limits_0^\eta\left(\frac{2}{3}\frac{\Phi''}{\eta^2}-\frac{16}{9}\frac{\Phi'\Phi''}{\eta^3}+\frac{10}{9}\frac{\Phi\Phi''}{\eta^4}+\frac{10}{9}\frac{\Phi'^2}{\eta^4}-\frac{10}{9}\frac{\Phi\Phi'}{\eta^5}\right)\mathrm{d}\,\eta$$

$$=\mp\frac{3c^2U_s^2\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}\left\{\left[\frac{10}{9}\frac{\Phi\Phi'}{\eta^4}-\frac{8}{9}\frac{\Phi'^2}{\eta^3}+\frac{5}{3}\frac{\Phi^2}{\eta^5}\right]_0^\eta+\int\limits_0^\eta\left(\frac{2}{3}\frac{\Phi''^2}{\eta^2}-\frac{8}{3}\frac{\Phi'^2}{\eta^4}+\frac{25}{3}\frac{\Phi^2}{\eta^6}\right)\mathrm{d}\,\eta\right\}$$

$$+\frac{1}{\varrho}\int\limits_0^y\frac{\sigma_t}{y}\mathrm{d}\,y=\pm\frac{3c^2U_s^2\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}\int\limits_0^\eta\left(\frac{2}{3}\frac{\Phi'\Phi''}{\eta^3}-\frac{2}{3}\frac{\Phi'^2}{\eta^4}-\frac{10}{9}\frac{\Phi\Phi''}{\eta^4}+\frac{10}{9}\frac{\Phi\Phi'}{\eta^4}\right)\mathrm{d}\,\eta$$

$$=\pm\frac{3c^2U_s^2\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}\left\{\left[\frac{1}{3}\frac{\Phi'^2\Phi''}{\eta^3}-\frac{10}{9}\frac{\Phi\Phi'}{\eta^4}-\frac{5}{3}\frac{\Phi^2}{\eta^5}\right]_0^\eta+\int\limits_0^\eta\left(\frac{13}{9}\Phi'^2-\frac{25}{3}\frac{\Phi^2}{\eta^2}\right)\mathrm{d}\,\eta\right\}$$

$$-\frac{1}{\varrho}[\sigma_y]_0^y=\mp\frac{3c^2U_s^2\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}\left[\frac{2\,\Phi''^2}{\eta}-\frac{16}{3}\frac{\Phi'\Phi''}{\eta^2}+\frac{10}{3}\frac{\Phi\Phi''}{\eta^3}+\frac{10}{3}\frac{\Phi'^2}{\eta^3}-\frac{10}{3}\frac{\Phi\Phi'}{\eta^4}\right]_0^\eta.$$

Die allgemeine Gleichung der Druckverteilung wird wegen ihrer Unübersichtlichkeit nicht angegeben.

Die auftretenden Integrale sind keine uneigentlichen Integrale. Die Unendlichkeitsstellen der Integranden im Nullpunkt heben sich in ihrer Vielfachheit gerade auf.

Der Druckunterschied zwischen Strahlmitte und Strahlrand berechnet sich zu

$$\frac{p_m-p_R}{\varrho}=0{,}3749\cdot(3\,c^2)^{\frac{2}{5}}\frac{U_s^2\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}\varrho.$$

Im Inneren des Strahls herrscht ein kleiner Überdruck. Die Druckdifferenz gegenüber der ruhenden Luft ist:

$$\frac{p_m-p_0}{\varrho}=0{,}2257\,(3\,c^2)^{\frac{2}{5}}\frac{U_s^2\sqrt[5]{(\Theta_s\beta)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}\varrho.$$

Die Druckunterschiede sind so klein, daß die Geschwindigkeiten nur unwesentlich geändert werden.

Stromlinien. Beim rotationssymmetrischen Problem ist die Stromfunktion definiert durch die Flüssigkeitsmenge innerhalb eines Kreises mit dem Radius y; es ist daher

$$u=\frac{1}{2\pi y}\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=-\frac{1}{2\pi y}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

In unserem Falle erhalten wir demnach als Gleichung der Stromlinien

$$\psi=2\pi x^{\frac{5}{3}}\Phi\quad\dots\dots\dots\dots\quad(52).$$

Für einen bestimmten Wert von ψ erhält man eine Stromlinie. Bild 6 zeigt die Stromlinien für

$$\psi = \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{6}{16},\ \frac{10}{16},\ \frac{15}{16},\ \frac{21}{16},$$
$$\frac{28}{16},\ \frac{36}{16},\ \frac{45}{16},\ \frac{55}{16},\ \frac{66}{16},\ \frac{78}{16}.$$

Die dazugehörigen Werte enthält Zahlentafel 6.

Bild 6.

Experimenteller Teil.

Um festzustellen, wieweit die theoretischen Ergebnisse mit den tatsächlichen Verhältnissen im Strahl übereinstimmen, wurden Geschwindigkeits- und Temperaturmessungen im runden Strahl vorgenommen. Die Geschwindigkeiten wurden nach der Hitzdrahtmethode ermittelt. Bei diesem Meßverfahren wird die Messung der Geschwindigkeit auf die Messung der Temperaturerniedrigung zurückgeführt, die das strömende Gas in einem elektrisch geheizten Draht hervorruft. Mit der Temperaturerniedrigung ist eine Widerstandsänderung verbunden, deren Größe, aus einer Brückenschaltung ermittelt, ein Maß für die Größe der Geschwindigkeit ist. Die verwendete Sonde, eine Zweidrahtsonde nach Reichardt[4]), hatte zwei Hitzdrähte verschiedenen Durchmessers, wodurch die durch die Temperaturunterschiede der Luft im Strahl bedingten Widerstandsänderungen ausgeschaltet werden konnten.

Die Lufttemperatur wurde mit einem Thermoelement gemessen. Zur Erzeugung der Strömung wurde eine Heizspirale verwandt, die über einen Transformator geheizt wurde. Um eine möglichst ungestörte Strömung zu erhalten, wurde die Spirale in ein kreisrundes Loch in einem Laboratoriumstisch so eingebaut (Bild 7), daß die Oberseite der Spirale mit der Tischebene gerade abschloß. Zum Ausmessen des Geschwindigkeitsfeldes wurde eine Lanze mit eingebauter Hitzdrahtsonde und eingebautem Thermoelement benutzt.

[4]) Beschrieben bei W. Paeschke: Zeitschr. Physik der freien Atmosphäre Bd. 24 (1937), S. 167.

Zahlentafel 6.

	$\psi = \frac{1}{16}$		$\psi = \frac{3}{16}$		$\psi = \frac{6}{16}$		$\psi = \frac{10}{16}$		$\psi = \frac{15}{16}$		$\psi = \frac{21}{16}$	
η	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,2	0,645	0,129	1,2665	0,2533	1.89	0,378	2,568	0,5136	3,275	0,655	4.007	0,8014
0,4	0.2952	0,1181	0,5707	0.2283	0.865	0,346	1,175	0,47	1,499	0,5996	1,834	0,7336
0,6	0.1938	0,11628	0.3747	0.2248	0,5679	0,3407	0,7715	0,463	0,984	0,5904	1.204	0,7224
0.8	0.1476	0.1181	0,2854	0.2283	0,4327	0,3462	0,586	0,47	0,7497	0,5998	0.9175	0,734
1	0.1242	0.1242	0.24	0,24	0.3638	0.3638	0,4943	0,4943	0,6304	0,6304	0,7715	0.7715
1,2	0,1102	0.1322	0,2131	0.2557	0.3229	0,3875	0,4388	0,5266	0,557	0,6711	0,6847	0,8216
1,4	0,1021	0.1429	0,1974	0,2764	0.2991	0,4187	0,4064	0,569	0,5184	0,7258	0,634	0,8876
1,6	0,0976	0.1562	0,1887	0.3019	0,2858	0.4573	0.3885	0,6216	0,4956	0,79296	0,6064	0.9702
1.8	0.09558	0,172	0,1848	0.3326	0,2802	0.5043	0.3805	0,6849	0,4855	0,8737	0,5939	1,069
2	0,09494	0.1899	0,1835	0,367	0.278	0.5564	0,378	0,7558	0,4821	0,964	0,5899	1,1798
2.11	0,09469	0.1998	0,183	0,386	0,2747	0,5853	0,377	0,7955	0.808	1,0145	0,5883	1,2413

	$\psi = \frac{28}{16}$		$\psi = \frac{36}{16}$		$\psi = \frac{45}{16}$		$\psi = \frac{55}{16}$		$\psi = \frac{66}{16}$		$\psi = \frac{78}{16}$	
η	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,2	4,758	0.9515	5.538	1.1076	6,332	1,2664	7,141	1,428	7,965	1,593	8,805	1,761
0,4	2,18	0,872	2.535	1.014	2,898	1,1592	3,269	1,308	3,647	1,459	4,031	1,6124
0,6	1,431	0,8586	1,664	0.9984	1,902	1,1412	2,144	1.2864	2,394	1,4364	2,646	1,5876
0.8	1.0903	0.8722	1,268	1,0144	1,449	1,1592	1,635	1,308	1,824	1,4592	2,016	1,6128
1	0,9168	0,9168	1.066	1.066	1.219	1,219	1,3746	1,3746	1,534	1,534	1,695	1,695
1.2	0,8138	0.9766	0.9908	1,18897	1,082	1,2984	1,2204	1,4645	1,361	1,633	1,505	1,805
1,4	0,7538	1.055	0.8765	1.227	1,002	1,403	1,13	1.582	1,261	1,765	1,394	1,9536
1,6	0.721	1.153	0,838	1.3408	0,958	1,5328	1,081	1,72896	1.2055	1,9288	1,3324	2,1318
1,8	0,7058	1.270	0,8206	1,477	0,9382	1,6876	1,058	1,9044	1,181	2,1258	1,305	2,349
2	0.7012	1,4023	0.8152	1,6304	0,932	1,864	1,051	2,102	1,172	2,344	1,295	2,591
2,11	0,6992	1,5652	0.8129	1,7145	0,9294	1,961	1,048	2,211	1,165	2,458	1,293	2,728

Die Lanze bestand aus einem 1000 mm langen, 20 mm breiten und 4 mm dicken, flachgedrückten Metallrohr, in das am einen Ende ein 120 mm langes, vierkantiges Stück eines Isolierstoffes etwa 40 mm eingeschoben war. An dem herausragenden Ende war die Sonde befestigt. Sie bestand aus zwei Blechen (Bild 8), an deren Enden zwei Hitzdrähte weich angelötet waren. Die gemeinsame Lötstelle der beiden Hitzdrähte lag an dem scharfkantig gehämmerten Ende eines Metalldrahtes, der an der Unterseite des zwischen den beiden Blechen liegenden isolierenden Verbindungsstücks befestigt war. Das Verbindungsstück, das die Aufgabe hatte, die Stabilität der Sonde zu erhöhen, trug auf seiner Oberseite, durch Isolierband isoliert, das Thermoelement. In Bild 8 ist das Thermoelement, dessen Lötstelle 2,5 mm vor den Hitzdrähten lag, schematisch eingezeichnet. An den Blechen bzw. dem Draht an der gemeinsamen Lötstelle der Hitzdrähte waren Drähte angelötet, die zu den Anzeigegeräten führten.

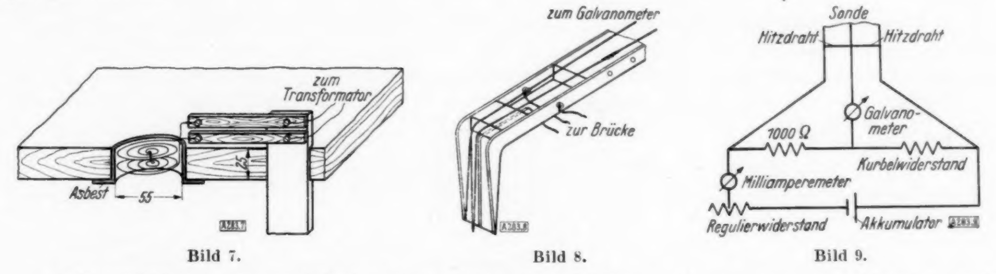


Bild 7. Bild 8. Bild 9.

Die Hitzdrähte waren Platin-Iridiumdrähte von 0,021 und 0,041 mm Durchmesser und 4 mm Länge. Sie lagen in zwei verschiedenen Kreisen einer Wheatstoneschen Brückenschaltung. Gegenübergeschaltet waren ein Festwiderstand von 1000 Ω, mit dessen Hilfe das Brückeninstrument, ein empfindliches Ruhstrat-Galvanometer, auf 0 einreguliert wurde. Die Regelung des Heizstroms für die Sonde, dessen Stromstärke 2 M.A. betrug, erfolgte über einen Widerstand. Als Anzeigegerät für die Heizstromstärke diente ein Milliampèremeter mit mehreren Meßbereichen, als Stromquelle ein Akkumulator (Schaltung Bild 9).

Um den gesamten auszumessenden Strahlraum koordinatenmäßig aufteilen zu können, wurde die Lanze, die eine cm-Teilung trug, auf dem senkrecht durch einen Zahntrieb verstellbaren Tischchen eines Stativs befestigt. Die Höhenlage konnte an einer senkrechten cm-Teilung abgelesen werden.

Das Thermoelement, dessen eine Lötstelle in den Luftstrom ragte, und dessen andere Lötstelle in einem Ölbade lag, dessen Temperatur mit einem Thermometer bestimmt wurde, war mit einem Galvanometer verbunden, dessen Ausschläge mit t_g bezeichnet, ein Maß für die Temperatur waren.

Um störende Einflüsse von außen, wie Luftzug und Temperaturschwankungen abzuhalten, wurden Fenster und Türen abgedichtet.

Die Messungen wurden wegen der Empfindlichkeit der Anordnung in windstillen Nächten durchgeführt.

Eichung. Vor Beginn der Messungen wurde die Zweidrahtsonde an dem Eichgebläse des K.W.J. mit Staurohr und zwei Kleindruckwaagen nach Reichardt mit verschiedenen Meßbereichen geeicht.

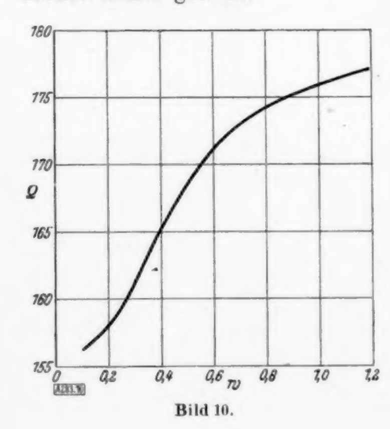


Bild 10.

Zahlentafel 7.

Tachometer	Ausschlag der Druckwaage II/4	w m/s	Kurbelwiderstand in Ω	Heizstrom in M.A.
10	1,5	0,0942	156,2	200
20	5,6	0,182	157,6	200
30	13,9	0,286	160,6	200
50	39,7	0,485	168	200
70	82,2	0,697	172,9	200
	Druckwaage II/6			200
90	19,1	0,888	174,2	200
110	29,0	1,095	175,8	200
130	40,1	1,289	177,6	200

Zur Berechnung der Geschwindigkeiten aus den Anzeigen der Druckwaagen wurde die Formel

$$w = \sqrt{15{,}15 \cdot \frac{760}{b} \cdot \frac{T}{273} \cdot C \cdot a}$$

verwandt. Dabei ist b der Barometerstand, T die absolute Temperatur, C der Eichfaktor der Druckwaage und a die Anzahl der Skalenteile der Druckwaage. Das Ergebnis der Eichung zeigen Zahlentafel 7 und Bild 10.

Die Eichung des Thermoelements ergab, daß in dem benötigten Temperaturbereich einem Skalenteil am Galvanometer 3,4° C entsprachen. Aus den mit t_g bezeichneten und in Skalenteilen angegebenen Ausschlägen des Galvanometers bestimmt sich Θ zu

$$\Theta = p \cdot t_g \, x^{\frac{5}{3}}.$$

Ausführung der Messungen. Zunächst wurden die Geschwindigkeiten und Temperaturen in der Strahlmitte in den Höhen 40, 50, 60, 70 und 80 cm über der Tischebene gemessen, um das Potenzgesetz zu prüfen. Dann wurden in den genannten Höhen die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen gemessen und zwar jeweils von der Strahlmitte nach dem Rand hin.

Die Messung sowohl der Geschwindigkeiten als auch der Temperaturen gestaltete sich dadurch schwierig, daß infolge der Verwirbelung des Strahls die Zeiger der Anzeigegalvanometer nicht zur Ruhe kamen, sondern pendelten. Es mußten also die Schwankungen beobachtet und daraus die Mittel gebildet werden. Nachdem die größeren Schwankungen, verursacht durch das Verschieben der Sonde, abgeklungen waren, wurden aus jeweils ungefähr 12 Ablesungen für Geschwindigkeit und Temperatur die Mittelwerte gebildet.

Auswertung der Messungen: Die erste Aufgabe bestand darin, an Hand des Versuchsmaterials das Potenzgesetz zu prüfen. Für die Geschwindigkeit gilt die Gleichung

$$u = q \, x^{-\frac{1}{3}} \frac{F'}{\eta} \qquad (q = \text{Umrechnungskonstante}).$$

Dabei ist x der Abstand vom Strahlursprung. Setzt man nun

$$x_1 = Z + 40, \quad x_2 = Z + 50, \quad x_3 = Z + 60, \quad x_4 = Z + 70, \quad x_5 = Z + 80$$

und setzt für u die gemessenen Geschwindigkeiten ein, so ergeben sich die folgenden 5 Gleichungen:

$$0{,}64 = q\,(Z+40)^{-\frac{1}{3}} \frac{F'}{\eta} \qquad (0{,}65),$$

$$0{,}61 = q\,(Z+50)^{-\frac{1}{3}} \frac{F'}{\eta} \qquad (0{,}609),$$

$$0{,}58 = q\,(Z+60)^{-\frac{1}{3}} \frac{F'}{\eta} \qquad (0{,}58),$$

$$0{,}56 = q\,(Z+70)^{-\frac{1}{3}} \frac{F'}{\eta} \qquad (0{,}55),$$

$$0{,}53 = q\,(Z+80)^{-\frac{1}{3}} \frac{F'}{\eta} \qquad (0{,}535).$$

Für die Temperatur gilt die Gleichung

$$\vartheta = p \cdot x^{-\frac{5}{3}} \Theta.$$

Setzt man auch hier für x die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_5$ und für ϑ t_g ein, so erhält man folgende Gleichungen:

$$13{,}95 = p\,(Z+40)^{-\frac{5}{3}} \Theta \qquad (14{,}2),$$

$$10{,}5 = p\,(Z+50)^{-\frac{5}{3}} \Theta \qquad (10{,}54),$$

$$8{,}2 = p\,(Z+60)^{-\frac{5}{3}} \Theta \qquad (8{,}19),$$

$$6{,}5 = p\,(Z+70)^{-\frac{5}{3}} \Theta \qquad (6{,}6).$$

$$5{,}49 = p\,(Z+80)^{-\frac{5}{3}} \Theta \qquad (5{,}42).$$

Eliminiert man nun in je zwei Gleichungen für die Geschwindigkeit $q \cdot \frac{F'}{\eta}$ und in je zwei Gleichungen für die Temperatur $p \cdot \Theta$ und setzt die verbleibenden rechten Seiten gleich, so ergeben sich aus den möglichen 20 Kombinationen 20 Werte von Z, aus denen sich durch Bildung des arithmetischen Mittels als Mittelwert für Z

$$Z = 11{,}1$$

ergab. Dieser Wert erwies sich für die Auswertung auch der anderen Messungen als brauchbar.

Der theoretische Ursprung des Strahls liegt nach dieser Rechnung nicht im Kopf der Heizspirale, sondern um 11,1 cm tiefer. Der Grund dafür liegt in der endlichen Ausdehnung der Spirale; in der Theorie dagegen war eine punktförmige Wärmequelle angenommen worden.

Setzt man nun den berechneten Wert von Z in die Geschwindigkeits- und Temperaturgleichungen ein, so lassen sich q und p daraus berechnen, und zwar ist $q = 2{,}4$ und $p = 10000$.

Die mit den ermittelten Werten von Z, p und q und den theoretischen Werten von Θ, $\frac{F'}{\eta}$ errechneten theoretischen Werte sind in Klammern hinter den Gleichungen beigefügt.

Das Ergebnis der Geschwindigkeits- und Temperaturmessungen zeigt Zahlentafel 8. Die mit der Sonde gemessene Geschwindigkeit ist $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ m/s; u und v lassen sich bei der Hitzdrahtmessung nicht voneinander trennen. Durch Multiplikation mit $x^{\frac{1}{3}}$ und Division durch 2,4 erhält man die auf das Maximum 1 umgerechnete und dimensionslose Geschwindigkeit $w \cdot x^{\frac{1}{3}} 0{,}417\, w\, x^{\frac{1}{3}}$.

Die am Galvanometer gemessenen t_g-Werte wurden mit Hilfe des Eichfaktors 3,4 und der Temperatur der 2. Lötstelle des Thermoelements von 21,7° C auf Celsiusgrade umgerechnet. Durch Multiplikation der t_g Werte mit $x^{\frac{5}{3}}$ erhält man die auf das Maximum 1 umgerechneten dimensionslosen Ausdrücke $t_g\, x^{\frac{5}{3}}$.

Zahlentafel 8.

	$x_1 = 51{,}1$					$x_2 = 61{,}1$				
y	$w = \sqrt{u^2 + v^2}$	$0{,}417\, x^{\frac{1}{3}}\, w$	t_g	ϑ °C	$0{,}0001\, t_g\, x^{\frac{5}{3}}$	$w = \sqrt{u^2 + v^2}$	$0{,}417\, x^{\frac{1}{3}}\, w$	t_g	ϑ °C	$0{,}0001\, t_g\, x^{\frac{5}{3}}$
0	0,64	0,992	13,95	69,1	0,982	0,61	1,01	10,5	57,7	0,995
2,5	0,595	0,929	13,37	67,2	0,94	0,58	0,96	10,1	56,0	0,958
5	0,41	0,64	8,96	52,2	0,63	0,46	0,754	7,58	47,5	0,742
7,5	0,27	0,42	5,12	39,1	0,36	0,28	0,47	4,37	36,6	0,417
10	0,16	0,30	3,13	32,4	0,22	0,19	0,32	2,67	30,7	0,262
12,5	0,11	0,23	1,42	26,5	0,10	0,18	0,29	1,58	27,1	0,15
15										

	$x_3 = 71{,}1$					$x_4 = 81{,}1$				
0	0,58	1,004	8,2	49,2	0,997	0,56	1,002	6,5	44,07	0,988
2,5	0,55	0,952	7,78	48,2	0,953	0,54	0,956	6,22	42,9	0,95
5	0,48	0,829	6,5	43,8	0,796	0,49	0,874	5,55	40,6	0,846
7,5	0,34	0,588	4,7	37,7	0,55	0,40	0,721	4,36	36,5	0,66
10	0,223	0,387	2,78	31,2	0,34	0,29	0,524	3,34	33,1	0,46
12,5	0,17	0,30	2,14	29	0,262	0,27	0,478	2,67	30,8	0,408
15	0,13	0,224	1,31	26,2	0,16	0,23	0,41	1,60	27,1	0,24
17,5						0,17	0,30	1,54	26,9	0,236

	$x_5 = 91{,}1$				
0	0,53	1,0	5,49	40,2	1,012
2,5	0,51	0,96	5,08	39	0,942
5	0,465	0,87	4,31	36,4	0,8
7,5	0,40	0,75	4	35,3	0,744
10	0,32	0,61	2,92	31,6	0,54
12,5	0,25	0,46	2,64	30,7	0,40
15	0,235	0,44	2,27	29,4	0,346
17,5	0,16	0,30	1,31	26,2	0,24
20	0,13	0,24	0,83	24,5	0,15

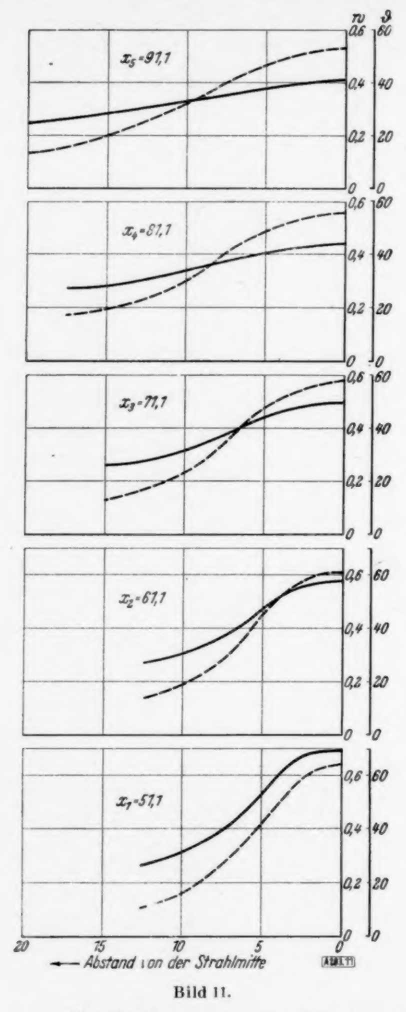


Bild 11.

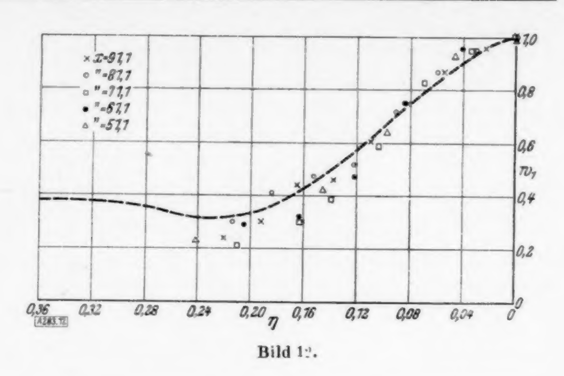


Bild 12.

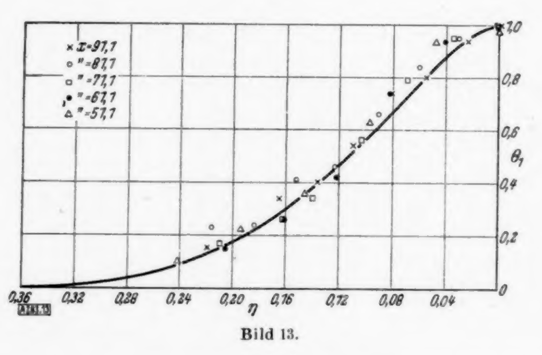


Bild 13.

Bild 11 enthält die über dem Abstand von der Strahlmitte als Abszisse aufgetragene Geschwindigkeit $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ und die Temperatur in Celsiusgraden.

Um die Gültigkeit des Breitengesetzes nachzuprüfen, wurden die Breiten durch Division durch $x \left(\frac{y}{x} = \eta\right)$ dimensionslos gemacht und die dazugehörigen Werte von $0{,}0001\, x^{\frac{5}{3}}\, t_g$ und $0{,}417\, x^{\frac{1}{3}}\, w$ in Bild 12 und 13 eingetragen.

Vergleicht man nun die aus der Theorie sich ergebenden Breiten an den Stellen, an denen Temperatur und Geschwindigkeit auf die Hälfte abgesunken sind, mit den entsprechenden Breiten von Bild 12 und 13, so läßt sich die noch unbekannte Konstante c gemäß der Beziehung

$$\eta_1 = (3\, c^2)^{-\frac{1}{3}} \eta$$

berechnen. Die Ausrechnung ergibt für c den Wert

$$c = 0{,}0417$$

und damit für den Mischungsweg l

$$l = 0{,}0417\, x\,.$$

Die in der Gleichung $b = r \cdot x$ auftretende Konstante r bestimmt sich aus der Gleichung $\eta_{1R} = (3\, c^2)^{-\frac{1}{3}} \frac{b}{x}$ zu

$$r = 0{,}366\,.$$

Damit ist $b = 0{,}366\, x$.

Die letzte noch unbekannte Konstante ε, die in der Gleichung $l = \varepsilon\, b$ auftritt, stellt sich, wenn für l und b ihre Werte eingesetzt werden, durch die beiden errechneten Konstanten c und r dar, und zwar ist $\varepsilon = \frac{c}{r} = 0{,}1139$ und damit

$$l = 0{,}1139\, b\,.$$

In Bild 12 und 13 sind die aus der Theorie sich ergebenden Werte von Θ_2, u_1 und $w_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ über η als Abszisse zum Vergleich mit den gemessenen Werten eingetragen (Θ_1 ausgezogen, w_1 gestrichelt).

Der Vergleich ergibt nur für die mittleren Profilhöhen Übereinstimmung. In der Strahlmitte und am Strahlrand ist die Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen schlechter.

Im unteren Teil des Profils schwanken die Meßpunkte sehr stark. Die Erklärung dafür ist wahrscheinlich in der Tatsache zu suchen, daß dieselben Störungen bei kleinen Geschwindigkeiten größere Abweichungen hervorrufen als bei großen.

Zusammenfassung.

Im ersten Teil dieser Arbeit wurde auf Grund von Ansätzen von Prandtl und Taylor für die scheinbare Schubspannung und eines Ansatzes für die turbulente Wärmeübertragung die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung für den Fall der durch Dichtedifferenz gegen die Umgebung hervorgerufenen ebenen Strömung berechnet. Bei der Benutzung des Prandtlschen Schubspannungsansatzes wurde die Voraussetzung gemacht, daß die Austauschgrößen in der scheinbaren Schubspannung und der turbulenten Wärmeübertragung identisch sind, während nach Taylor die Austauschgröße der turbulenten Wärmeübertragung zweimal so groß ist wie die der scheinbaren Schubspannung. Die Lösung erfolgte durch Reihenansätze. Die Ergebnisse sind den Ansätzen entsprechend verschieden. Während nach Prandtl das Temperaturprofil stärker abfällt als das Geschwindigkeitsprofil, das Temperaturprofil also ganz innerhalb des Geschwindigkeitsprofils verläuft, ist das Ergebnis der Rechnung nach Taylor umgekehrt.

Die Theorie ergab für beide Annahmen, daß die Geschwindigkeit in der Mitte des Strahls von der Entfernung von der heißen Linie unabhängig ist, die Temperatur dagegen dem Abstand von der heißen Linie umgekehrt proportional ist.

Die Berechnung der in erster Näherung vernachlässigten Druckunterschiede ergab für die Mitte des Strahls bei der Taylorschen Annahme Gleichdruck, bei der Prandtlschen einen kleinen Unterdruck gegenüber dem Druck in großer Entfernung.

Im zweiten Teil wurde das rotationssymmetrische Problem behandelt. Die Theorie lieferte hier das Ergebnis, daß die Geschwindigkeit mit $x^{-\frac{1}{3}}$ und die Temperatur mit $x^{-\frac{5}{3}}$ abnimmt. Für das räumliche Problem wurde die Rechnung nur mit dem Prandtlschen Ansatz durchgeführt. Der Taylorsche Ansatz konnte hier nicht verwandt werden, weil er unter der Voraussetzung ebener Turbulenz abgeleitet ist und der analoge rotationssymmetrische Ansatz auch bei anderen Aufgaben versagt hat. Der „modifizierte Taylorsche Ansatz" würde voraussichtlich gegenüber dem Prandtlschen Ansatz ähnliche Untschiede aufweisen wie im zweidimensionalen Fall.

Auch hier lieferte die Berechnung der Druckunterschiede einen Überdruck im Inneren des Strahls. Die bei der Berechnung der Druckunterschiede auftretenden Integrale wurden mit Hilfe der Simpsonschen Regel ausgewertet.

Der rotationssymmetrische Fall, der sich am leichtesten experimentell verwirklichen läßt, wurde durch Versuche geprüft, bei denen die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung mit Hitzdrahtsonde und Thermoelement gemessen wurde. Die von der Theorie geforderten Exponenten m und p wurden bestätigt. Die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile stimmten dagegen nicht sehr genau mit dem theoretischen überein. Für die in der Theorie offenbleibende Zahl c wurde der Wert $c = 0{,}04165$ ermittelt, was $l = 0{,}1139\, b$ und $b = 0{,}3655\, x$ liefert.

Schrifttum.

[1] Prandtl: The Mechanics of Viscous Fluids. In: Durand: Aerodynamic Theory, Bd. III Berlin 1935.
[2] Dryden: Aerodynamics of Cooling. In: Durand: Aerodynamic Theory, Bd. VI Berlin 1936.
[3] Tollmien: Turbulente Strömungen. In: Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV_1 Leipzig 1931.
[4] Prandtl: Über die ausgebildete Turbulenz. Aus den Verhandlungen des II. Kongresses für Technische Mechanik. Zürich 1926.
[5] Ruden: Turbulente Ausbreitungsvorgänge im Freistrahl. Naturwiss. Bd. 21 (1933), S. 375.
[6] Schlichting: Über das ebene Windschattenproblem. Ing.-Arch. Bd. 1 (1930), S. 533.
[7] L. M. Swain: On the turbulent wake behind a body of revolution. Proc. Roy. Soc. A Bd. 125 (1929), S. 647.
[8] Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Z. angew. Math. Mech. Bd. 6 (1926), S. 468.
[9] G. I. Taylor: The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. With an appendix by Fage and Falkner. Proc. Roy. Soc. A Bd. 135 (1932), S. 685 und S. 702.

XUM

Das statistische Problem der Korrelation als Variations- und Eigenwertproblem und sein Zusammenhang mit der Ausgleichsrechnung.

Von *Hans Gebelein* in Eßlingen.

Von einem voll befriedigenden Korrelationsmaß ist zu verlangen, daß es durch sein Verschwinden mit Sicherheit anzeigt, wenn die beiden Veränderlichen unabhängig voneinander sind, und daß es anderseits mit Sicherheit den Wert Eins annimmt, wenn zwischen ihnen vollständige Abhängigkeit besteht. Die Aufgabe, ein solches Korrelationsmaß zu gewinnen, führt auf ein Variationsproblem und kann zurückgeführt werden auf die Frage nach dem kleinsten Eigenwert einer homogenen Fredholmschen Integralgleichung. Bei der Untersuchung dieses Variationsproblems wird auch der Zusammenhang mit den bisher üblichen Korrelationsmaßen und mit dem Problem der Ausgleichsrechnung ersichtlich.

1. Problemstellung und übliche Korrelationsmaße.

Einer der bemerkenswertesten Gesichtspunkte für die Beurteilung zweidimensionaler Wahrscheinlichkeitsverteilungen $w(x, y)$ ist der, ob durch Festlegung der einen Veränderlichen x die Verteilung der y-Werte mehr oder weniger stark beeinflußt wird oder nicht. Eine solche Beeinflußbarkeit besteht bekanntlich nicht, wenn $w(x, y)$ das Produkt einer Funktion $w_1(x)$ von x allein und einer Funktion $w_2(y)$ von y allein ist. Die Merkmale x und y sind in diesem Fall voneinander stochastisch unabhängig. Andererseits kann es vorkommen, daß zu jedem bestimmten Wert für x nur ein einziger y-Wert auftritt. Dann ist y eine Funktion von x und man spricht von vollständiger Korrelation zwischen den beiden Merkmalen. Im allgemeinen liegt der Befund zwischen diesen beiden Grenzfällen und es entsteht dann die Frage nach einem Maß für die Straffheit des Zusammenhangs zwischen x und y. Dies ist das sog. Korrelationsproblem der Statistik.

Um die Korrelation zwischen y und x zu kennzeichnen, gibt es bekanntlich eine Anzahl verschiedener Rechengrößen, die wir zunächst der Reihenfolge nach aufführen. Wir betrachten vor allem den Fall einer sog. geometrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Merkmale x und y. Eine solche wird durch eine wesentlich positive Funktion $w(x, y)$ mit der Normierung

$$\iint w(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

dargestellt. Wird über x bzw. y allein integriert, so entstehen die beiden Funktionen

$$w_1(x) = \int w(x, y)\, \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad w_2(y) = \int w(x, y)\, \mathrm{d}x \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

deren Integrale über x bzw. y wiederum den Wert Eins besitzen. Mit a und b bezeichnen wir im folgenden die Mittelwerte für x und y auf Grund der Verteilung $w(x, y)$; das sind die Schwerpunktskoordinaten der mit der Massendichte $w(x, y)$ belegten xy-Ebene. Es ist

$$\left.\begin{aligned} a &= \iint x\, w(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int x\, w_1(x)\, \mathrm{d}x, \\ b &= \iint y\, w(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int y\, w_2(y)\, \mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Weiter bedeuten s^2 und t^2 die Streuungen der x um ihren Mittelwert a bzw. der y um ihren Mittelwert b; dies sind die beiden Trägheitsmomente der mit $w(x, y)$ belegten Ebene um Achsen durch den Schwerpunkt und parallel zu den Koordinatenachsen. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} s^2 &= \iint (x-a)^2\, w(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int (x-a)^2\, w_1(x)\, \mathrm{d}x, \\ t^2 &= \iint (y-b)^2\, w(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int (y-b)^2\, w_2(y)\, \mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Als Korrelationsmaße kommen Zahlengrößen in Betracht, welche erstens für jede vorgegebene zweiparametrige Verteilung sich berechnen lassen, zweitens den Wert Null annehmen, wenn x und y stochastisch unabhängig voneinander sind, und drittens gleich Eins werden im Falle vollständiger Korrelation zwischen x und y.

Die erste und zweite dieser Bedingungen erfüllt der auf dem Zentrifugalmoment der Verteilung beruhende klassische

Korrelationskoeffizient:

$$r = \frac{1}{s\,t} \iint (x-a)(y-b)\, w(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

XUM

Bekanntlich ist stets $r^2 \leqq 1$ (vgl. unten Gl. (13)); der Wert $r = +1$ tritt auf, wenn y linear mit x zunimmt und der Wert $r = -1$, wenn y linear mit x zusammenhängt und mit wachsendem x abnimmt. Der Mangel dieses Korrelationskoeffizienten ist der, daß auf Grund von $r = 0$ nicht auf vollkommene Unabhängigkeit mit $w(x, y) = w_1(x)\, w_2(y)$ geschlossen werden kann, während anderseits trotz vollständiger stochastischer Abhängigkeit von x und y immer dann, wenn x und y nichtlinear zusammenhängen, r von Eins verschieden ausfällt.

Namentlich um dem zweiten Übelstand abzuhelfen, wurden andere Korrelationsmaße erfunden. Ein geeignetes Mittel zur eingehenderen Analyse der Verteilung $w(x, y)$ sind die sog. Regressionslinien $\bar{y}(x)$ und $\bar{x}(y)$. Es sind dies bei mechanischer Auffassung die geometrischen Orte für die Schwerpunkte der Streifen in der xy-Ebene parallel zu den Koordinatenachsen

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \frac{\int y\, w(x, y)\, \mathrm{d}y}{\int w(x, y)\, \mathrm{d}y} = \frac{1}{w_1(x)} \int y\, w(x, y)\, \mathrm{d}y, \\ \bar{x}(y) &= \frac{\int x\, w(x, y)\, \mathrm{d}x}{\int w(x, y)\, \mathrm{d}x} = \frac{1}{w_2(y)} \int x\, w(x, y)\, \mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

In den beiden Grenzfällen stochastischer Unabhängigkeit und vollständiger Abhängigkeit sind die Regressionslinien deutlich gekennzeichnet. Bei Unabhängigkeit ist wegen $w(x, y) = w_1(x)\, w_2(y)$, $\bar{y}(x) = b$ und $\bar{x}(y) = a$, d. h. die Regressionslinien sind die waagerechte und die lotrechte Gerade durch den Schwerpunkt der Verteilung. Es ist jedoch zu beachten, daß aus dieser Lage der Regressionslinien, d. h. der Schwerpunkte nicht etwa umgekehrt auf das Vorliegen stochastischer Unabhängigkeit geschlossen werden kann, denn es folgt daraus nicht, daß $w(x, y) = w_1(x)\, w_2(y)$ ist. Anderseits ist bei vollständiger Abhängigkeit, wo die x und y einander eindeutig durch die Funktion $y(x)$ oder $x(y)$ zugeordnet sind, $\bar{y}(x) = y(x)$ und $\bar{x}(y) = x(y)$, so daß in diesem Falle die beiden Regressionslinien zusammenfallen.

Auf diesen Regressionslinien beruhen die von Pearson in die statistische Praxis eingeführten

Korrelationsverhältnisse:

$$\left.\begin{aligned} k_{yx}^2 &= \frac{1}{t^2} \int (\bar{y}(x) - b)^2\, w_1(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{(Korr.-Verh. von } y \text{ zu } x), \\ k_{xy}^2 &= \frac{1}{s^2} \int (\bar{x}(y) - a)^2\, w_2(y)\, \mathrm{d}y \qquad \text{(Korr.-Verh. von } x \text{ zu } y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7).$$

Diese Korrelationsverhältnisse nehmen den Wert Null bei Unabhängigkeit und vor allem den Wert Eins ganz allgemein bei vollständiger Verbundenheit sicher an. Daher wäre die Messung der Korrelation mit Hilfe dieser Größen sehr zufriedenstellend, wenn sie eindeutig wäre. Handelt es sich aber nicht um einen der beiden Grenzfälle mit $k_{yx}^2 = k_{xy}^2 = 0$ oder 1, dann stimmen im allgemeinen k_{yx}^2 und k_{xy}^2 nicht miteinander überein. Nur wenn die Regressionslinien geradlinig sind, besitzen die beiden Korrelationsverhältnisse den gleichen Wert, welcher dann auch gleich dem Quadrat des Korrelationskoeffizienten r ist.

Ebenfalls von Pearson wurde für die Messung der Korrelation das Kontingenzmaß (Mean square Contingency)

$$\left.\begin{aligned} f^2 &= \frac{1}{\sqrt{(m-1)(n-1)}} \sum_{ik} \frac{\{w(x_i y_k) - w_1(x_i)\, w_2(y_k)\}^2}{w_1(x_i)\, w_2(y_k)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(m-1)(n-1)}} \left\{ \sum_{ik} \frac{w^2(x_i y_k)}{w_1(x_i)\, w_2(y_k)} - 1 \right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

vorgeschlagen. Hierfür muß eine arithmetische Verteilung $w(x_i y_k)$ vorliegen, bei welcher m und n die Anzahl der Zeilen und Spalten der sog. Korrelationstabelle ist. Daß bei stochastischer Unabhängigkeit wegen $w(x_i y_k) = w_1(x_i)\, w_2(y_k)$, $f^2 = 0$ wird, ist sofort zu sehen. Bei vollständiger Abhängigkeit dagegen, wobei notwendig $m = n$ ist, gilt für die n von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeiten $w(x_i y_k)$

$$w(x_i, y_k) = w_1(x_i) = w_2(y_k).$$

Daher sind die n nichtverschwindenden Glieder $w^2(x_i y_k) / w_1(x_i)\, w_2(y_k)$ alle gleich Eins und wegen $m = n$ wird auch $f^2 = 1$.

Der besondere Vorzug dieses Pearsonschen Kontingenzmaßes ist der, daß nur die Häufigkeiten, aber nicht die x- bzw. y-Werte selbst vorkommen. Daher läßt es sich auch dann eindeutig angeben, wenn die Merkmale nicht zahlenmäßig faßbar sind, wie z. B. Farbe,

Geschlecht usw. Sein Nachteil besteht darin, daß f^2 sich nur für arithmetische Verteilungen bilden läßt und daß, wie sich später zeigt, eine sinnvolle Verallgemeinerung auf Verteilungsfunktionen $w(x, y)$ überhaupt nicht möglich ist.

Jedes dieser Korrelationsmaße hat also bestimmte Vorzüge und Mängel; ihr gegenseitiger Zusammenhang ist nicht leicht zu übersehen. Im folgenden wird nun gezeigt, daß das Korrelationsproblem in seiner allgemeinsten Fassung auf ein Variationsproblem führt, daß dieses Variationsproblem weiter auf eine homogene Fredholmsche Integralgleichung und damit auf ein Eigenwertproblem zurückgeführt werden kann, und daß die bisher üblichen Korrelationsmaße nichts anderes sind als nach verschiedenen Methoden gewonnene erste Näherungen für den kleinsten Eigenwert dieser Integralgleichung. Handelt es sich um eine arithmetische Häufigkeitsverteilung, dann entartet die Integralgleichung und an ihre Stelle tritt ein homogenes, lineares Gleichungensystem.

Die Frage nach der besten Zuordnung der y und x zueinander tritt auch in der Ausgleichsrechnung auf, wenn es sich darum handelt, eine Reihe Beobachtungspunkte durch einen einfachen Kurvenzug möglichst gut wiederzugeben. Die neuen Gesichtspunkte, unter denen hier das Korrelationsproblem betrachtet wird, liefern auch eine Übersicht über die Möglichkeiten für die Lösung jener Aufgabe und es zeigt sich, daß die für das Korrelationsproblem entwickelten Verfahren sich auch bei der Aufgabe des Kurvenausgleichs mit Vorteil anwenden lassen.

2. Variationsprobleme und Integralgleichungen.

Da alle die bisher üblichen Korrelationsmaße bestimmte Mängel aufweisen, stellen wir nun ohne Rücksicht auf leichte Berechenbarkeit die Frage nach einem theoretisch vollkommenen und dabei begrifflich einfachen Korrelationsmaß. In bezug auf begriffliche Einfachheit ist am befriedigendsten der Korrelationskoeffizient r. Sein Hauptmangel ist der, daß er gegenüber einer (nichtlinearen) Transformation der Veränderlichen x und y je für sich nicht invariant ist. Werden den beiden Merkmalen andere Zahlen zugeordnet, d. h. wird das Abszissenmaß x gemäß einer bestimmten Vorschrift $f(x)$ verzerrt und ebenso der Ordinatenmaßstab entsprechend einer Funktion $g(y)$, dann ändert sich im allgemeinen der Zahlenwert für r. Dieser Nachteil der Größe r fällt fort, wenn grundsätzlich alle Transformationen dieser Art berücksichtigt werden. Um ein verbessertes Korrelationsmaß zu gewinnen, fragen wir daher nach dem größten Wert, den r bei solchen Transformationen annehmen kann und kommen so auf das folgende

Variationsproblem:

Gegeben ist eine wesentlich positive Funktion $w(x,y)$ mit der Normierung $\iint w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$. Es sind die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ so zu bestimmen, daß

$$K^2 = \frac{\{\iint f(x)\,g(y)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\}^2}{\iint f^2(x)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \iint g^2(y)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \text{Maximum} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

wird. Dann ist K^2 ein Maß für die Korrelation in der Verteilung $w(x, y)$. In der Ausdrucksweise der Mechanik bedeutet dieses Korrelationsmaß den größten Wert, den bei allen möglichen Verzerrungen in x- und y-Richtung der Quotient des quadrierten Zentrifugalmoments und der beiden Trägheitsmomente der Verteilung annehmen kann.

Man kann das Variationsproblem etwas einfacher schreiben, wenn man zur Konkurrenz nur normierte Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ zuläßt, welche die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \iint f^2(x)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int f^2(x)\,w_1(x)\,\mathrm{d}x = 1\,, \\ \iint g^2(y)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int g^2(y)\,w_2(y)\,\mathrm{d}y = 1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

erfüllen. Wegen der Gleichungen (1) bis (4) sind solche Funktionen z. B. $f(x) = 1$, $f(x) = \dfrac{x - a}{s}$ usw. und $g(y) = 1$, $g(y) = \dfrac{y - \mathrm{b}}{t}$ usw. Infolge dieser Festsetzung lautet das Variationsproblem der Korrelation in seiner ersten Fassung

$$K^2 = \iint f(x)\,g(y)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2 = \text{Maximum} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Damit dieses Variationsproblem sinnvoll wird, ist jedoch noch eine Nebenbedingung erforderlich. Wegen $w(x, y) \geqq 0$ folgt mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \{\iint f(x)\,g(y)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\}^2 &= \{\iint f(x)\sqrt{w(x,y)} \cdot g(y)\sqrt{w(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\}^2 \\ &\leqq \iint f^2(x)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cdot \iint g^2(y)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1\,. \end{aligned}$$

Bei dieser Abschätzung gilt dann das Gleichheitszeichen, wenn die Funktionen $f(x)\sqrt{w(x,y)}$ und $g(y)\sqrt{w(x,y)}$ zueinander proportional sind. Dies trifft für beliebiges $w(x,y)$ zu, wenn $f(x) = g(y) = 1$ ist. Dieser Fall ist aber wegen Gl. (1) eine Selbstverständlichkeit und daher aus der Betrachtung auszuschließen. Daher sind für das Variationsproblem nur solche

Funktionen zur Konkurrenz zuzulassen, die für die „Belegungen" $w_1(x)$ bzw. $w_2(y)$ zu $f(x)=1$ bzw. zu $g(y)=1$ orthogonal sind. Die Bedingungen hierfür lauten

$$\left.\begin{aligned}\iint f(x)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int f(x)\, w_1(x)\,\mathrm{d}x = 0,\\ \iint g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int g(y)\, w_2(y)\,\mathrm{d}y = 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Sind sie erfüllt, dann ist K^2 im allgemeinen von Eins verschieden und selbstverständlich sicher kleiner als Eins. Insbesondere aber wird dann im Falle vollständiger stochastischer Unabhängigkeit wegen $w(x,y)=w_1(x)\,w_2(y)$

$$\iint f(x)\, g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int f(x)\, w_1(x)\,\mathrm{d}x \int g(y)\, w_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

und daher, wie es sein muß, auch $K^2=0$.

Zwei Funktionen, welche auch die Bedingungen (12) erfüllen, sind nach Gl. (3) z. B. $f(x)=\dfrac{x-a}{s}$ und $g(y)=\dfrac{y-b}{t}$. Für sie geht das Integral der Gl. (11) in das Quadrat des Korrelationskoeffizienten r nach Gl. (5) über. Daher gilt für K^2 die Abschätzung

$$r^2 \leqq K^2 \leqq 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

und außerdem wurde damit das obengenannte Ergebnis erhalten, daß der Korrelationskoeffizient r absolut stets höchstens gleich Eins ist bei beliebiger Verteilung $w(x,y)$.

Das Variationsproblem (11) enthält zwei verfügbare Funktionen. Wir führen es nun in ein solches mit nur einer freien Funktion über, indem wir uns zunächst $f(x)$ oder $g(y)$ fest angenommen denken und dann die andere Funktion so hinzu bestimmen, daß das Doppelintegral seinen unter diesen Umständen größten Wert annimmt. Diese Aufgabe läßt sich mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung $(\int F\,G\,\mathrm{d}x)^2 \leqq \int F^2\,\mathrm{d}x \int G^2\,\mathrm{d}x$ lösen, indem

$$F(x)=f(x)\sqrt{w_1(x)}, \qquad G(x)=\frac{1}{\sqrt{w_1(x)}}\int g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}y$$

gesetzt wird. Damit ist

$$\begin{aligned}\left\{\iint f(x)\, g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}^2 &= \left\{\int f(x)\sqrt{w_1(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{w_1(x)}}\int g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right\}^2\\ &\leqq \underbrace{\int f^2(x)\, w_1(x)\,\mathrm{d}x}_{=1}\cdot\int\frac{1}{w_1(x)}\left(\int g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x\\ &= \int\frac{1}{w_1(x)}\left(\int g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dies ist der größte Wert, den das Variationsintegral für ein bestimmtes $g(y)$ und für beliebige $f(x)$ annehmen kann. Die obere Schranke wird dann erreicht, wenn $F(x)$ und $G(x)$ einander proportional sind, wenn also $f(x)$ und $g(y)$ miteinander durch die Gleichung

$$\frac{G(x)}{F(x)}=\frac{\int g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}y}{w_1(x)\, f(x)}=\text{konst.}=C$$

verbunden sind. Die Konstante C selbst folgt durch beiderseitige Integration der Gleichung $C^2 F^2(x) = G^2(x)$ auf Grund der Bemerkung, daß $\int F^2(x)\,\mathrm{d}x=1$ ist. So ergibt sich für C^2

$$C^2=\int G^2(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{w_1(x)}\left(\int g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x,$$

also genau der Wert der oberen Schranke in der Abschätzung.

Wir erhalten damit das Ergebnis: Liegt $g(y)$ fest und ist nur die eine Funktion $f(x)$ frei verfügbar, dann nimmt das Variationsintegral (11) den unter diesen Umständen größtmöglichen Wert

$$C^2=\int\frac{1}{w_1(x)}\left(\int g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

dann an, wenn für $f(x)$ die Funktion

$$f(x)=\frac{1}{C\, w_1(x)}\int g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

eingesetzt wird.

Wird bei dieser Betrachtung von der richtigen Funktion $g(y)$ ausgegangen, welche dem Doppelintegral den größten überhaupt möglichen Wert K^2 verleiht, dann wird $C^2=K^2$ und daher ist Gl. (14) eine neue Fassung unseres Variationsproblems, wenn man wieder $g(y)$ als frei verfügbar betrachtet. Selbstverständlich können bei dieser Zurückführung des Variationsproblems auf ein solches mit nur einer Unbekannten die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ auch

XUM

ihre Rollen vertauschen. Wir erhalten also als zweite Fassung für das Variationsproblem der Korrelation die folgenden beiden Integrale:

$$\left.\begin{aligned} K^2 &= \int \frac{1}{w_1(x)} \left(\int g(y)\, w(x,y)\, \mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x = \text{Maximum} \\ &\text{und} \\ K^2 &= \int \frac{1}{w_2(y)} \left(\int f(x)\, w(x,y)\, \mathrm{d}x\right)^2 \mathrm{d}y = \text{Maximum} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16).$$

Um diese Integrale näherungsweise auszuwerten, liegt es nahe, für $f(x)$ bzw. $g(y)$ lineare Funktionen einzusetzen, die natürlich die Normierungsbedingung (10) und die Orthogonalitätsbedingung (12) erfüllen müssen. Diese Funktionen lauten $f(x) = \frac{x-a}{s}$ bzw. $g(y) = \frac{y-b}{t}$. Mit ihnen wird wegen (2) und (6) zunächst

$$\int g(y)\, w(x,y)\, \mathrm{d}y = \int \frac{y-b}{t}\, w(x,y)\, \mathrm{d}y = \frac{\overline{y}(x) - b}{t}\, w_1(x),$$

$$\int f(x)\, w(x,y)\, \mathrm{d}x = \int \frac{x-a}{s}\, w(x,y)\, \mathrm{d}x = \frac{\overline{x}(y) - a}{s}\, w_2(y)$$

und daher nach (16)

$$\int \frac{1}{w_1(x)} \left(\int g(y)\, w(x,y)\, \mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{t^2} \int (\overline{y}(x) - b)^2\, w_1(x)\, \mathrm{d}x = k_{yx}^2$$

$$\int \frac{1}{w_2(y)} \left(\int f(x)\, w(x,y)\, \mathrm{d}x\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{s^2} \int (\overline{x}(y) - a)^2\, w_2(y)\, \mathrm{d}y = k_{xy}^2 .$$

Diese Näherungswerte sind also die beiden Pearsonschen Korrelationsverhältnisse (7).

Durch dieses Ergebnis wird die Stellung der Korrelationsverhältnisse in der allgemeinen Theorie und ihr Verhältnis gegenüber den anderen Korrelationsmaßen aufgezeigt. k_{yx}^2 und k_{xy}^2 sind zwei verschiedene erste Näherungen für unser allgemeines Korrelationsmaß K^2. Bei k_{yx}^2 ist $g(y) = \frac{y-b}{t}$, während für $f(x)$ beliebige Funktionen in Wettbewerb stehen; umgekehrt ist bei k_{xy}^2 $f(x) = \frac{x-a}{s}$, während eine Mannigfaltigkeit von Funktionen $g(x)$ zur Konkurrenz zugelassen sind. Beidemal ist also das Variationsproblem nicht voll ausgeschöpft und daher müssen im allgemeinen beide Korrelationsverhältnisse kleiner als K^2 ausfallen, wobei K^2 ihre obere Grenze ist. Anderseits sind sie als Näherungen des Variationsproblems sicher besser als der Wert, den das Variationsintegral (11) auf Grund linearer Ansätze für $f(x)$ und $g(y)$ annimmt. Daher ist r^2 eine untere Schranke für beide Korrelationsverhältnisse.

Die zweite Funktion kommt in den Formeln für k_{yx}^2 und k_{xy}^2 jeweils nicht mehr explizit vor. Sie ist bis auf einen Normierungsfaktor im ersten Fall gleich $\overline{y}(x) - b$, im zweiten gleich $\overline{x}(y) - a$, stimmt also im wesentlichen jedesmal mit der einen Regressionslinie überein. Auch diese Funktionen erfüllen die Orthogonalitätsbedingungen (12). Sind sie linear, dann müssen sie wegen der Orthogonalität und der Normierung mit $\frac{x-a}{s}$ und $\frac{y-b}{t}$ übereinstimmen. Es sind dann die beiden Funktionenpaare miteinander identisch und daher liefern auch die beiden Korrelationsverhältnisse den gleichen Zahlenwert, der überdies dann mit r^2 übereinstimmen muß. Damit erhalten wir das oben ohne Beweis genannte Ergebnis, daß im Falle geradliniger Regressionslinien $k_{yx}^2 = k_{xy}^2 = r^2$ ist.

Denkt man sich in den Variationsproblemen (16) für $f(x)$ und $g(y)$ die Lösungsfunktionen eingesetzt, so daß die Integrale den Wert K^2 annehmen, dann bestehen, nach dem Vorgang der Gl. (15) für diese beiden Funktionen die simultanen Integralgleichungen

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\varkappa\, w_1(x)} \int g(y)\, w(x,y)\, \mathrm{d}y, \\ g(y) &= \frac{1}{\varkappa\, w_2(y)} \int f(x)\, w(x,y)\, \mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (17).$$

Diese beiden Gleichungen liefern zusammen

$$f(x) = \frac{1}{K} \int \frac{w(x,y)}{w_1(x)}\, g(y)\, \mathrm{d}y = \frac{1}{K} \int \frac{w(x,y)}{w_1(x)} \cdot \frac{1}{\varkappa} \int \frac{w(z,y)}{w_2(y)}\, f(z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{K^2} \int\!\!\int \frac{w(x,y)\, w(z,y)}{w_1(x)\, w_2(y)}\, f(z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y .$$

Dieses Ergebnis ist eine homogene Fredholmsche Integralgleichung für die Funktion $f(x)$

$$f(x) = \lambda \int \frac{W(x,z)}{w_1(x)} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

mit dem Kern

$$W(x,z) = \int \frac{w(x,y)\,w(z,y)}{w_2(y)}\,\mathrm{d}y \qquad \text{und mit } \lambda = \frac{1}{K^2}.$$

Man kann diese Gleichung auch als solche mit symmetrischem Kern hinschreiben. Sie lautet dann

$$f(x)\sqrt{w_1(x)} = \lambda \int \frac{W(x,z)}{\sqrt{w_1(x)\,w_1(z)}} f(z)\sqrt{w_1(z)}\,\mathrm{d}z \quad \ldots \ldots \quad (18\,\mathrm{a}).$$

Selbstverständlich gibt es auch für $g(y)$ eine entsprechende Integralgleichung. Sie kann durch Elimination von $f(x)$ aus den beiden simultanen Integralgleichungen (17) gewonnen werden.

Die erste, selbstverständliche Eigenfunktion der Integralgleichung (18) ist $f(x) = 1$, der zugehörige Eigenwert $\lambda = 1$. Durch die Nebenbedingung (12) für $f(x)$ ist sie bereits aus der Betrachtung ausgeschlossen worden. Wir spalten sie daher folgerichtig vom Kern ab und erhalten dann mit dem am besten bei Gl. (18a) reduzierten Kern

$$\frac{W(x,z)}{\sqrt{w_1(x)\,w_1(z)}} - \frac{1}{\lambda}\sqrt{w_1(x)}\,f(x)\sqrt{w_1(z)}\,f(z) = \frac{W(x,z) - w_1(x)\,w_1(z)}{\sqrt{w_1(x)\,w_1(z)}}$$

nach Beseitigung der Wurzeln die Integralgleichung

$$f(x) = \lambda \int \frac{W(x,z) - w_1(x)\,w_1(z)}{w_1(x)} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Die Frage nach dem durch das Variationsproblem (11) erklärten Korrelationsmaß K^2 ist wegen $\lambda = 1/K^2$ nunmehr die Frage nach dem kleinsten Eigenwert dieser Integralgleichung. Dieser erste Eigenwert ist nach der Theorie der Integralgleichungen auch durch ein Variationsproblem bestimmt und daher ergibt sich nun für das Variationsproblem der Korrelation die folgende dritte Fassung

$$K^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}} = \iint \{W(x,z) - w_1(x)\,w_1(z)\}\,f(x)\,f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \text{Maximum} \quad \ldots \quad (20).$$

Das Maximum entsteht, wenn für $f(x)$ die erste Eigenfunktion der Gl. (19) eingesetzt wird. Verwendet man statt dessen für eine Näherungsrechnung die Funktion $f(x) = \frac{x-a}{s}$, dann erhält man wiederum das Pearsonsche Korrelationsverhältnis k^2_{xy}.

Ohne weitere Annahmen über die Verteilungsfunktion $w(x,y)$ läßt sich über die Integralgleichung natürlich nicht sehr viel aussagen. Vor allem ist ihr Kern sicher definit, denn wenn man bei (20) die Orthogonalitätsbedingung $\int f(x)\,w_1(x)\,\mathrm{d}x = 0$ berücksichtigt und die Reihenfolge der Integrationen vertauscht, entsteht wieder der Ausdruck (16) für K^2, und diesem Variationsintegral ist sofort anzusehen, daß es nur positive Werte annehmen kann. Dagegen kann man nicht damit rechnen, daß die Eigenwerte einfach sind, und daher versprechen Verfahren zur Ermittlung des ersten Eigenwerts, die auf eine Trennung der Eigenwerte hinauslaufen, hier keinen Erfolg. Um eine Übersicht über die bestehenden Möglichkeiten zu gewinnen, betrachten wir nun wieder die beiden Grenzfälle vollständiger Unabhängigkeit und vollständiger Abhängigkeit der beiden Merkmale.

a) Vollkommene Unabhängigkeit:

In diesem Fall wird wegen $w(x,y) = w_1(x)\,w_2(y)$ das Integral auf der rechten Seite der Gl. (19) für eine beliebige Funktion $f(x)$

$$\begin{aligned}\int \frac{W(x,z) - w_1(x)\,w_1(z)}{w_1(x)} f(z)\,\mathrm{d}z &= \iint \frac{w(x,y)\,w(z,y)}{w_1(x)\,w_2(y)} f(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \int w_1(z)\,f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \iint w_1(z)\,w_2(y)\,f(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \int w_1(z)\,f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int w_1(z)\,f(z)\,\mathrm{d}z - \int w_1(z)\,f(z)\,\mathrm{d}z = 0.\end{aligned}$$

Daher wachsen für alle als Eigenfunktionen der Integralgleichung in Betracht kommenden $f(x)$ die zugehörigen Eigenwerte λ über alle Grenzen. Vor allem ist bereits der kleinste Eigenwert unendlich groß und daher $K^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}} = 0$.

Während aber aus dem Verschwinden des Korrelationskoeffizienten r und auch der Korrelationsverhältnisse k_{yx}^2 bzw. k_{xy}^2 nicht folgt, daß x und y voneinander stochastisch unabhängig sind, ist dieser Schluß berechtigt, wenn das neue Korrelationsmaß K^2 den Wert Null annimmt. Dies folgt am einfachsten durch Betrachtung der Bilinearreihe für den Kern der Integralgleichung. Sind $f_i(x)$ die sämtlichen Eigenfunktionen und λ_i die zugehörigen Eigenwerte, die durchaus nicht alle voneinander verschieden sein müssen, dann lautet diese Darstellung

$$\frac{W(x,z)-w_1(x)\,w_1(z)}{\sqrt{w_1(x)\,w_1(z)}}=\sum_i\frac{1}{\lambda_i}\sqrt{w_1(x)}\,f_i(x)\sqrt{w_1(z)}\,f_i(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Im vorliegenden Fall sind alle λ_i unendlich, und daher vereinfacht sich (21) zu $W(x,z)-w_1(x)\,w_1(z)=0$ und weiter für $z=x$ zu

$$W(x,x)-w_1^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Mit Hilfe der Definitionsgleichung für $W(x,z)$ und der Gln. (2) wird nun

$$\begin{aligned}W(x,x)-w_1^2(x)&=\int\frac{w^2(x,y)}{w_2(y)}\,dy-2\,w_1(x)\int w(x,y)\,dy+w_1^2(x)\int w_2(y)\,dy\\&=\int\left\{\frac{w^2(x,y)}{w_2(y)}-2\,w_1(x)\,w(x,y)+w_1^2(x)\,w_2(y)\right\}dy\\&=\int\frac{1}{w_2(y)}\{w(x,y)-w_1(x)\,w_2(y)\}^2\,dy=0.\end{aligned}$$

Da der Integrand wesentlich positiv ist, kann diese Gleichung nur dann bestehen, wenn überall dort, wo $w(x,y)$ und damit auch $w_1(x)$ und $w_2(y)$ von Null verschieden ist, die Beziehung

$$w(x,y)=w_1(x)\,w_2(y)$$

gilt. Das heißt aber, die Merkmale x und y sind in der Tat stochastisch unabhängig voneinander.

b) Vollkommene Abhängigkeit:

In diesem Fall treten nur längs einer Kurve $y=y(x)$ in der xy-Ebene von Null verschiedene Wahrscheinlichkeiten auf. Die zweiparametrige Verteilung $w(x,y)$ ist als Funktion von x und y ausgeartet, denn es ist

$$w(x,y)=\begin{cases}0 & \text{für } y\neq y(x)\\ \infty & \text{für } y=y(x).\end{cases}$$

Dagegen sind die Integrale

$$\int w(x,y)\,dy=w_1(x) \quad \text{und} \quad \int w(x,y)\,dx=w_2(y)$$

definiert, und es ist wie stets $\int w_1(x)\,dx=\int w_2(y)\,dy=1$.

Wir nehmen nun an, die Zuordnung zwischen den zusammengehörigen x- und y-Werten sei umkehrbar eindeutig, so daß $y=y(x)$ und ebenso die Umkehrung $x=x(y)$ eindeutige Funktionen sind. Wegen der ausschließlichen Verteilung der Wahrscheinlichkeiten längs der Kurve $y(x)$ besteht dann die Differentiationsformel

$$w_1(x)\,dx=w_2(y)\,dy\,,$$

und außerdem ist für jede beliebige, eindeutige Funktion $f(x)$

$$\int f(x)\,w(x,y)\,dx=f(x(y))\cdot\int w(x,y)\,dx=f(x(y))\cdot w_2(y).$$

Diese Tatsache ermöglicht die Berechnung des Integrals auf der rechten Seite der Gl. (19) für eine beliebige Funktion $f(x)$, welche die Orthogonalitätsbedingungen (12) erfüllt. Es ist

$$\begin{aligned}\int\frac{W(x,z)-w_1(x)\,w_1(z)}{w_1(x)}f(z)\,dz&=\iint\frac{w(x,y)\,w(z,y)}{w_1(x)\,w_2(y)}f(z)\,dy\,dz-\int w_1(z)\,f(z)\,dz\\&=\frac{1}{w_1(x)}\int\frac{1}{w_2(y)}\int f(z)\,w(z,y)\,dz\cdot w(x,y)\,dy\\&=\frac{1}{w_1(x)}\int f(x(y))\,w(x,y)\,dy\\&=f(x(y(x)))=f(x).\end{aligned}$$

In diesem Fall sind also alle zu $w_1(x)$ orthogonalen Funktionen Eigenfunktionen der Integralgleichung oder Linearkombinationen solcher. Die zugehörigen Eigenwerte aber sind

alle gleich Eins, d. h. $\lambda = 1$ ist unendlichfacher Eigenwert. Eine normierte Eigenfunktion ist z. B.

$$f(x) = \frac{x - a}{s}.$$

Um vollständige Abhängigkeit nachzuprüfen, genügt es daher, mit diesem einfachsten Ansatz zu rechnen, was auf die Ermittlung des Korrelationsverhältnisses $k^2_{x\,y}$ hinausläuft. Jedenfalls ist also zum Nachweis der Korrelation Eins die Lösung der Integralgleichung nicht erforderlich.

Es ist nun noch die Frage zu klären, ob auch umgekehrt beim Vorliegen des Korrelationsmaßes $K^2 = 1$ mit Sicherheit auf vollständige stochastische Abhängigkeit der beiden Merkmale, d. h. auf eineindeutigen, funktionsmäßigen Zusammenhang zwischen x und y geschlossen werden kann. Im angenommenen Fall gibt es eine Funktion $f(x)$, welche zusammen mit der nach Gl. (17) zugeordneten Funktion $g(y)$ dem Variationsintegral für K^2 den Wert Eins verleiht. Wir betrachten nun den Ausdruck für K^2 in seiner ursprünglichen Fassung nach Gl. (11). Wegen der Normierungen (10) ist allgemein

$$K^2 = \iint f(x)\, g(y)\, w(x, y)\, \mathrm{d}\,x\, \mathrm{d}\,y = \frac{1}{2} \iint \{f^2(x) + g^2(y) - [f(x) - g(y)]^2\}\, w(x, y)\, \mathrm{d}\,x\, \mathrm{d}\,y$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \iint [f(x) - g(y)]^2\, w(x, y)\, \mathrm{d}\,x\, \mathrm{d}\,y\,.$$

Damit sich $K^2 = 1$ ergibt, muß also

$$\iint [f(x) - g(y)]^2\, w(x, y)\, \mathrm{d}\,x\, \mathrm{d}\,y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

sein. Dies ist nur dann der Fall, wenn überall dort, wo $w(x, y)$ nicht verschwindet, $f(x) = g(y) = \text{const}$ ist.

Umgekehrt ergibt sich $K^2 = 1$ immer dann, wenn $w(x, y)$ nur in solchen rechteckigen Bereichen von Null verschieden ist, wo Streifen parallel zur y-Achse und zugeordnete Streifen parallel zur x-Achse sich überdecken. Zu allen Streifen eines einzelnen solchen Streifensystems (Bild 1) gehört der gleiche Wert der Konstanten für $f(x) = g(y)$. Die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ können, weil sie orthogonal zu $w_1(x)$ bzw. $w_2(y)$ sein müssen, nicht für alle x und y konstant sein, sondern sie sind stückweise konstante Treppenkurven, die mindestens je einen positiven und einen negativen Wert annehmen. Daher besteht der Verteilungsplan in der xy-Ebene aus mindestens zwei solchen beschriebenen Streifensystemen.

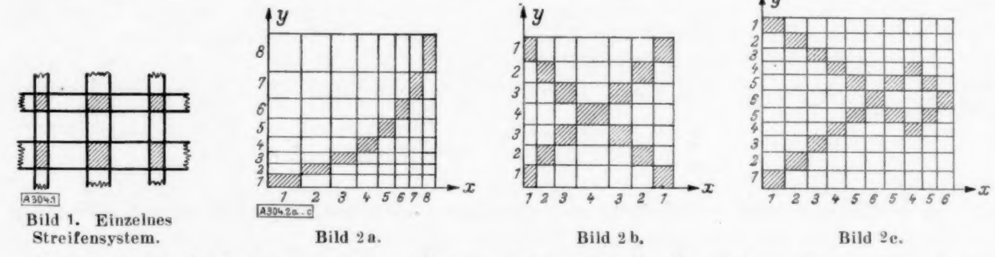


Bild 1. Einzelnes Streifensystem.

Bild 2a.

Bild 2b.

Bild 2c.

Die Bilder 2a bis c zeigen drei Beispiele für derartige Verteilungspläne. Nur in den schraffierten Feldern, die zu waagerechten und senkrechten Streifen mit gleichen Ziffern gehören, darf $w(x, y)$ von Null verschieden sein. Wird die Streifeneinteilung unbegrenzt verfeinert, dann entsteht der oben betrachtete Fall, daß nur längs einer Kurve der xy-Ebene die Wahrscheinlichkeiten nicht verschwinden. Diese Kurve braucht aber nicht, wie oben für die Rechnung angenommen wurde, die x- und y-Werte einander eineindeutig zuordnen, denn nur beim ersten Beispiel ist dies der Fall, während die anderen beiden Beispiele auf mehrdeutige Funktionen führen. Es ist für die Verteilungspläne kennzeichnend, daß nicht punktweise die x und y einander zugeordnet werden, sondern daß Klasseneinteilungen für die Abszissen und Ordinaten auftreten und eine eineindeutige Zuordnung nur zwischen den x-Klassen und den y-Klassen mit gleichen Ziffern besteht. Für den stochastischen Zusammenhang von x und y entsteht dadurch ein gewisser Spielraum, den auch das Korrelationsmaß K^2 nicht zu erkennen gibt.

Das Korrelationsmaß K^2 ist gemäß seiner Definition unabhängig von der Zuordnung der x- und y-Werte zu den beiden Merkmalen der Verteilung. Bei den bisher entwickelten Formeln für K^2 kommen aber die beiden Zuordnungsfunktionen $f(x)$ und $g(y)$ einzeln oder zusammen explizit vor. Besonders wünschenswert wäre dagegen ein Ausdruck für den kleinsten Eigenwert der Integralgleichung (19), welcher weder $f(x)$ noch $g(y)$, sondern nur

die Verteilungsfunktion $w(x, y)$ enthält. Um einen solchen Ausdruck zu gewinnen, liegt es nahe, von der Entwicklung des Kerns durch eine Bilinearreihe nach Gl. (21) auszugehen,

$$\frac{W(x, z) - w_1(x)\, w_1(z)}{\sqrt{w_1(x)\, w_1(z)}} = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \sqrt{w_1(x)} f_i(x) \sqrt{w_1(z)} f_i(z) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (21).$$

Wir betrachten diese Gleichung nur formal, ohne nach ihrer Konvergenz und nach den dazu notwendigen Voraussetzungen zu fragen. Für $z = x$ liefert die Integration über x

$$J = \int \frac{W(x, x) - w_1^2(x)}{w_1(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots$$

Der Integrand erlaubt folgende beiden Umformungen

$$\frac{W(x, x) - w_1^2(x)}{w_1(x)} = \int \frac{w^2(x, y)}{w_1(x)\, w_2(y)} \mathrm{d}y - w_1(x) = \int \frac{[w(x, y) - w_1(x)\, w_2(y)]^2}{w_1(x)\, w_2(y)} \mathrm{d}y .$$

Daher folgt für J das Ergebnis

$$J = \iint \frac{[w(x, y) - w_1(x)\, w_2(y)]^2}{w_1(x)\, w_2(y)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint \frac{w^2(x, y)}{w_1(x)\, w_2(y)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - 1 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots \quad (24).$$

Dieser Ausdruck stimmt in seinem Aufbau mit dem Pearsonschen Kontingenzmaß (8) für arithmetische Verteilungen überein. Er wäre vielleicht geeignet, um Schlüsse auf den ersten Eigenwert λ_1 und damit auf die Stärke der Korrelation zu ziehen, wenn dieser Eigenwert sicher einfach wäre und wenn die Reihe der reziproken Eigenwerte konvergieren würde. Beides muß nicht der Fall sein, denn wir haben gesehen, daß im Falle vollkommener Abhängigkeit $\lambda_1 = 1$ sogar ein unendlichfacher Eigenwert ist, was natürlich auch das Unendlichwerden des Kerns der Integralgleichung zur Folge hat. Man hat also beim Korrelationsproblem sehr mit singulärem Verhalten der Integralgleichung zu rechnen, und daher lassen sich die aus der Theorie der Integralgleichungen bekannten Verfahren zum großen Teil nicht anwenden. Ein klares, aber selbstverständliches Ergebnis läßt sich nur im Falle vollständiger Unabhängigkeit von x und y feststellen. In diesem Fall ist bereits λ_1 unendlich groß und ebenso alle übrigen Eigenwerte; daher ist nach (24) $J = 0$.

Während bei geometrischer Verteilung $w(x, y)$ die Größe J sich demnach nicht als brauchbar zur Messung der Korrelation erweist, gibt sie für arithmetische Verteilungen[1]) gewisse Aufschlüsse über die Korrelationsverhältnisse. Bei arithmetischen Verteilungen treten an die Stelle der Integralgleichungen lineare Gleichungensysteme, und die Anzahl der Eigenwerte ist endlich und gleich der Zeilen bzw. Spalten der Korrelationstabelle.

Ist $w(x_i\, y_k)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung für m mögliche x-Werte x_i und n mögliche y-Werte y_k, dann lautet das Gegenstück zur Kernfunktion $W(x, z)$ der Integralgleichung (18)

$$W(x_i\, x_l) = \sum_k \frac{w(x_i\, y_k)\, w(x_l\, y_k)}{w_2(y_k)} \qquad \text{mit } w_2(y_k) = \sum_i w(x_i\, y_k)$$

und der Integralgleichung selbst entspricht das lineare Gleichungensystem mit m Gleichungen

$$f(x_i) = \lambda \sum_l \frac{W(x_i\, x_l)}{w_1(x_i)} f(x_l) = \lambda \sum_{l\,k} \frac{w(x_i\, y_k)\, w(x_l\, y_k)}{w_1(x_i)\, w_2(y_k)} f(x_l).$$

Die Spur der Determinanten dieses Gleichungensystems liefert die Summe aller m reziproken Eigenwerte

$$\sum_{i\,k} \frac{w^2(x_i\, y_k)}{w_1(x_i)\, w_2(y_k)} = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{m-1}} .$$

Dabei ist $\lambda_0 = 1$ der selbstverständliche Eigenwert, der zur Eigenfunktion $f(x) = 1$ gehört und beim Übergang von Gl. (18) zu Gl. (19) abgespalten wurde. Wir erhalten damit das Ergebnis

$$\left.\begin{aligned} J = \sum_{i\,k} \frac{w^2(x_i\, y_k)}{w_1(x_i)\, w_2(y_k)} - 1 &= \sum_{i\,k} \frac{\{w(x_i\, y_k) - w_1(x_i)\, w_2(y_k)\}^2}{w_1(x_i)\, w_2(y_k)} \\ &= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{m-1}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (24\,\text{a}).$$

[1]) Für arithmetische Verteilungen läßt sich die hier vorgetragene Korrelationstheorie mit elementaren algebraischen Hilfsmitteln entwickeln. Sie ist ausführlich dargestellt in einem demnächst erscheinenden Buch des Verfassers über mathematische Statistik. (Verlag Quelle u. Meyer, Hochschulwissen in Einzeldarstellungen.)

Ebenso könnte man die Rechnung auch mit Hilfe eines linearen Gleichungensystems für die $g(y_k)$ durchführen, welches der Integralgleichung für $g(y)$ entsprechen und n Gleichungen enthalten würde. Das Ergebnis (24a) würde dadurch sich nur insofern ändern, daß die Reihe der reziproken Eigenwerte mit dem Glied $1/\lambda_{n-1}$ abbrechen würde. Da aber der Ausdruck auf der linken Seite in beiden Fällen übereinstimmt, weil er in bezug auf die x und y symmetrisch ist, und da, wie sich leicht zeigen läßt, die beiden Darstellungsweisen auf identische Systeme endlicher Eigenwerte führen[2]), so müssen, falls $m \neq n$ ist, alle nur in der einen Entwicklung vorkommenden, überschüssigen Eigenwerte unendlich sein.

Es sei nun $n \leqq m$. Die Zahl der von Null verschiedenen reziproken Eigenwerte ist dann $n-1$. Der kleinste dieser Eigenwerte, λ_1, liefert unser Korrelationsmaß $K^2 = 1/\lambda_1$, für alle übrigen aber gilt $1/\lambda_i \leqq K^2$. Also ist $J \leqq (n-1) \cdot K^2$ und erst recht, wenn eine in m und n symmetrische Abschätzungsformel bevorzugt wird,

$$J \leqq \sqrt{(m-1)(n-1)}\, K^2 \qquad \text{oder} \qquad K^2 \geqq \frac{J}{\sqrt{(m-1)(n-1)}}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Formel ist das Pearsonsche Kontingenzmaß f^2 nach Gl. (8). Wir erhalten damit das Ergebnis

$$\left.\begin{aligned} f^2 &= \frac{1}{\sqrt{(m-1)(n-1)}} \sum_{ik} \frac{\{w(x_i y_k) - w_1(x_i)\, w_2(y_k)\}^2}{w_1(x_i)\, w_2(y_k)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(m-1)(n-1)}} \left\{ \sum_{ik} \frac{w^2(x_i y_k)}{w_1(x_i)\, w_2(y_k)} - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(m-1)(n-1)}} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots \right) \leqq K^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25).$$

Es ist also f^2 sicher kleiner als unser Korrelationsmaß K^2 und damit kleiner als Eins. Seinem Aufbau nach ist f^2 ein Mittelwert aus den $(m-1)$ bzw. $(n-1)$ reziproken Eigenwerten des aus der Korrelationsaufgabe entspringenden Eigenwertproblems.

Diese Zusammenhänge lassen erkennen, daß erstens eine Anwendung des Pearsonschen Kontingenzmaßes auf geometrische Verteilungen grundsätzlich nicht möglich ist, denn dieser Mittelwert der reziproken Eigenwerte ist bei einer Integralgleichung entweder unbestimmt oder Null, also keine für die Messung der Korrelation geeignete Größe; zweitens, daß das Kontingenzmaß mit dem Korrelationskoeffizienten r und den beiden Korrelationsverhältnissen k^2_{xy} und k^2_{yx} sich nicht gut vergleichen läßt, weil der Zusammenhang jener Größen mit K^2 von dem in Gl. (25) dargestellten allzu verschieden ist.

Besonders bemerkenswert ist wiederum der Fall vollkommener stochastischer Abhängigkeit. In diesem Fall ist $m = n$, und für die allein vorkommenden, zusammengehörigen Werte x_i und y_k gilt

$$w(x_i y_k) = w_1(x_i) = w_2(y_k).$$

Das Gleichungensystem, das an die Stelle der Integralgleichung getreten ist, reduziert sich unter diesen Umständen auf die n Gleichungen $f(x_i) = \lambda f(x_i)$, welche alle die Lösung $\lambda = 1$ besitzen. Daher ist $\lambda = 1$ n-facher Eigenwert des vollständigen Kerns und damit $(n-1)$ facher Eigenwert des reduzierten Kerns. Es wird $J = n-1$ und $f^2 = 1$. Das Kontingenzmaß läßt also bei arithmetischen Verteilungen vollständige, stochastische Abhängigkeit sicher erkennen.

3. Reihenentwicklungen für die Größen der Korrelationstheorie.

Die oben entwickelte Korrelationstheorie ist nichts anderes als eine allgemeine Theorie der zweidimensionalen Verteilung $w(x, y)$. Um die Funktion $w(x, y)$ nach Orthogonalfunktionen zu entwickeln, braucht man zwei Funktionensysteme, nämlich eines mit Funktionen von x und eines mit Funktionen von y allein. Wir verwenden zu diesem Zweck die normierten Orthogonalpolynome steigenden Grades $\varphi_n(x)$ zur Belegung $w_1(x) = \int w(x, y)\, dy$ und $\psi_n(y)$ zur Belegung $w_2(y) = \int w(x, y)\, dx$. Für diese Polynome bestehen die Gleichungen

$$\int \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, w_1(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \quad \text{und} \quad \int \psi_i(y)\, \psi_j(y)\, w_2(y)\, dy = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \quad . \; (26).$$

Die ersten dieser Polynome lauten

$$\varphi_0(x) = 1;\ \varphi_1(x) = \frac{x-a}{s} \text{ usw.,} \quad \psi_0(y) = 1;\ \psi_1(y) = \frac{y-b}{t} \text{ usw.}$$

[2]) Der Beweis findet sich im Buch des Verfassers.

Für weitgehend beliebige Funktionen $f(x)$ bzw. $g(y)$ bestehen die Reihenentwicklungen

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(x) & \text{mit} \quad a_i=\int f(x)\varphi_i(x) w_1(x)\,\mathrm{d}x \\ g(y)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j \psi_j(y) & \text{mit} \quad b_j=\int g(y)\psi_j(y) w_2(y)\,\mathrm{d}y \end{array}\right\} \quad (27).$$

Wir wollen im folgenden annehmen, daß die vorkommenden Reihen dieser Art gleichmäßig konvergieren, wenn sie nicht sogar nach endlich vielen Gliedern abbrechen, so daß stets gliedweise Integration gestattet ist. Unter dieser Voraussetzung ist z. B.

$$\int f^2(x) w_1(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(x)\right)^2 w_1(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i,k=0}^{\infty} a_i a_k \int \varphi_i(x)\psi_k(x) w_1(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$$

und entsprechend für $g(y)$, so daß für $f(x)$ und $g(y)$ die sog. Vollständigkeitsrelationen gelten

$$\int f^2(x) w_1(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2; \quad \int g^2(y) w_2(y)\,\mathrm{d}y=\sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 \quad (28).$$

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x,y)$ bestehe eine (ebenfalls gleichmäßig konvergente) Entwicklung der Form

$$w(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y) w_1(x) w_2(y).$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit dem Produkt zweier bestimmter Polynome $\varphi_i(x)$ und $\psi_j(y)$ und Integration über x und y ergibt sich dann wegen der Orthogonalität der $\varphi_i(x)$ und der $\psi_j(y)$ für die Entwicklungskoeffizienten c_{ij} die Formel

$$c_{ij}=\iint \varphi_i(x)\psi_j(y) w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Diejenigen Koeffizienten c_{ij}, für welche $i=0$ oder $j=0$ ist, lassen sich sofort angeben. Es ist

für $i=j=0$ $\quad c_{00}=\iint w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1,$

für $i=0,\ j\neq 0$ $\quad c_{0j}=\iint \psi_j(y) w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int \psi_j(y) w_2(y)\,dy=0$

und

für $i\neq 0,\ j=0$ $\quad c_{i0}=\iint \varphi_i(x) w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int \varphi_i(x) w_2(x)\,\mathrm{d}x=0.$

Damit vereinfacht sich die Reihenentwicklung für $w(x,y)$ zu

$$w(x,y)=w_1(x)w_2(y)+\sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y) w_1(x) w_2(y)$$

oder

$$\frac{w(x,y)}{w_1(x)w_2(y)}=1+\sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y) \quad \text{mit} \quad c_{ij}=\iint \varphi_i(x)\psi_j(y) w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (29).$$

Wir vermerken noch die der Vollständigkeitsrelation (28) entsprechende Formel für $w(x,y)$. Sie lautet

$$\iint \frac{w^2(x,y)}{w_1(x)w_2(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\left(\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y)\right)^2 w_1(x)w_2(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}^2 \int \varphi_i^2(x) w_1(x)\,\mathrm{d}x \int \psi_j^2(y) w_2(y)\,\mathrm{d}y=\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}^2$$

oder, weil $c_{00}=0$ und $c_{0j}=c_{i0}=0$ ist für i bzw. $j\neq 0$,

$$\iint \frac{w^2(x,y)}{w_1(x)w_2(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-1=\sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij}^2 \quad (30).$$

Dies ist der Ausdruck J von Gl. (24), der dem Pearsonschen Kontingenzmaß f^2 nach Gl. (25) für arithmetische Verteilungen zugrunde liegt.

Es ist noch zu erwähnen, daß im Falle einer arithmetischen Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x_i y_k)$ mit endlich vielen Zeilen und Spalten der Korrelationstabelle die Anzahl der Funktionen $\varphi_i(x)$ mit der der Spalten und die Anzahl der Funktionen $\psi_j(y)$ mit der der Zeilen übereinstimmt. Die betrachteten Reihenentwicklungen brechen daher in diesem Falle alle mit endlich vielen Gliedern ab.

Im Mittelpunkt unserer Korrelationstheorie steht der Ausdruck (11)

$$K^2 = \left\{\int\int f(x)\, g(y)\, w(x, y)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y\right\}^2 = \text{Maximum},$$

wobei die zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ noch die Nebenbedingungen

$$\int f(x)\, w_1(x)\, \mathrm{d}\, x = 0, \qquad \int f^2(x)\, w_1(x)\, \mathrm{d}\, x = 1,$$
$$\int g(y)\, w_2(y)\, \mathrm{d}\, y = 0, \qquad \int g^2(y)\, w_2(y)\, \mathrm{d}\, y = 1$$

erfüllen müssen. Nach (28) und (29) besagen diese Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen in bezug auf die Reihenentwicklungen für $f(x)$ und $g(y)$, daß

$$a_0 = b_0 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

sein muß. Nun wird

$$\int\int f(x)\, g(y)\, w(x, y)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y$$
$$= \int\int \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \varphi_i(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_j\, \psi_j(y) \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{k\,l}\, \varphi_k(x)\, \psi_l(y)\, w_1(x)\, w_2(y)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y$$
$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i\, b_j\, c_{i\,j}.$$

Das Variationsproblem der Korrelation lautet also in der neuen Fassung mit Hilfe der Entwicklungskoeffizienten $c_{i\,j}$

$$K^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i\, b_j\, c_{i\,j}\right)^2 = \text{Maximum}$$

unter den Nebenbedingungen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = 1$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 = 1$.

Der einfachste Näherungswert für K^2 entsteht, wenn man $a_1 = b_1 = 1$ und alle übrigen a_i und b_j gleich Null setzt, d. h. wenn man mit den Prüffunktionen $f(x) = \varphi_1(x) = \frac{x-a}{s}$ und $g(y) = \psi_1(y) = \frac{y-b}{t}$ rechnet. Das Ergebnis dieser Näherungsrechnung ist an Stelle von K^2 das Quadrat des Korrelationskoeffizienten r. Also ist nach (32)

$$r = c_{11} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33).$$

In der zweiten Fassung des Variationsproblems (16) und in den Integralgleichungen der Korrelation (17) kommen die Funktionen

$$\int f(x)\, w(x, y)\, \mathrm{d}\, x \quad \text{und} \quad \int g(y)\, w(x, y)\, \mathrm{d}\, y$$

vor. Mit Hilfe der Reihenentwicklungen wird

$$\int f(x)\, w(x, y)\, \mathrm{d}\, x = \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \varphi_k(x) \left\{1 + \sum_{i\,j=1}^{\infty} c_{i\,j}\, \varphi_i(x)\, \psi_j(y)\right\} w_1(x)\, w_2(y)\, \mathrm{d}\, x$$
$$= \sum_{i\,j=1}^{\infty} a_i\, c_{i\,j}\, \psi_j(y)\, w_2(y)$$

und ebenso

$$\int g(y)\, w(x, y)\, \mathrm{d}\, y = \sum_{i\,j=1}^{\infty} b_j\, c_{i\,j}\, \varphi_i(x)\, w_1(x).$$

Die Integralgleichungen sagen aus, daß diese Funktionen mit

$$K\, g(y)\, w_2(y) = K\, w_2(y) \sum_{j=1}^{\infty} b_j\, \psi_j(y)$$

und mit

$$K\, f(x)\, w_1(x) = K\, w_1(x) \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \varphi_i(x)$$

übereinstimmen. Durch Vergleich ergeben sich daher die folgenden, an die Stelle der simultanen Integralgleichungen tretenden, unendlichen linearen Gleichungensysteme für die Koeffizienten a_i und b_j:

$$a_i = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{\infty} b_j c_{ij}, \quad b_j = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{\infty} a_i c_{ij} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (34).$$

Die Frage ist die nach dem größtmöglichen Wert für K. Man kann K isolieren, indem man beide Seiten dieser Gleichungen quadriert, addiert und die Vollständigkeitsrelationen (31) beachtet. Auf diese Weise ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} K^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j c_{ij} \right)^2 = \text{Maximum}, \\ K^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i c_{ij} \right)^2 = \text{Maximum} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (35).$$

Dies sind die beiden Variationsintegrale in Koeffizientenfassung, wie man auch durch unmittelbares Ausrechnen der beiden Ausdrücke (16) sofort bestätigen kann.

Setzt man in der ersten dieser Formeln $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = \cdots = 0$, dann ergibt sich das Pearsonsche Korrelationsverhältnis k_{yx}^2, und ebenso ergibt sich k_{xy}^2, wenn man in die zweite Formel $a_1 = 1$ und $a_2 = a_3 = \cdots = 0$ einsetzt. Wir erhalten damit für die beiden Korrelationsverhältnisse die Darstellungen

$$k_{yx}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i1}^2, \quad k_{xy}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} c_{1j}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (36).$$

Man ersieht an diesem Ergebnis sofort, daß beide Korrelationsverhältnisse größer als $r^2 = c_{11}^2$ ausfallen müssen, und man überzeugt sich auch leicht, daß sie nur dann untereinander und mit r^2 übereinstimmen, wenn die oben besprochenen Regressionslinien geradlinig sind. Für die Regressionslinien $\bar{y}(x)$ und $\bar{x}(y)$ gelten nämlich, wie oben im Anschluß an Gl. (16) ausgeführt wurde, die Gleichungen

$$\frac{\bar{y}(x) - b}{t} = \frac{1}{w_1(x)} \int \frac{y - b}{t} w(x, y) \, \mathrm{d}y = \frac{1}{w_1(x)} \int \psi_1(y) \, w(x, y) \, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i1} \varphi_i(x),$$

$$\frac{\bar{x}(y) - a}{s} = \frac{1}{w_2(y)} \int \frac{x - a}{s} w(x, y) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{w_2(y)} \int \varphi_1(x) \, w(x, y) \, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{\infty} c_{1j} \psi_j(y).$$

Sie sind demnach dann und nur dann geradlinig, wenn die Reihen rechts sich auf die linearen Funktionen $c_{11} \varphi_1(x)$ bzw. $c_{11} \psi_1(y)$ reduzieren. Die Bedingungen dafür aber lauten

$$c_{21} = c_{31} \cdots = 0 \quad \text{und} \quad c_{12} = c_{13} = \cdots = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (37),$$

und dies sind die gleichen Bedingungen, unter denen $k_{yx}^2 = k_{xy}^2 = r^2$ ist.

Durch Elimination der Funktion $g(y)$ aus den beiden simultanen Integralgleichungen (17) wurde oben die Fredholmsche Integralgleichung (18) für $f(x)$ allein gewonnen. Ebenso entsteht durch Elimination der b_j aus den Gln. (34) ein lineares Gleichungensystem für die Größen a_i allein. Es ist

$$a_k = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{\infty} b_j c_{kj} = \frac{1}{K^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i c_{ij} c_{kj} = \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i C_{ik} \quad \text{mit} \quad C_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} c_{kj}.$$

Das der Integralgleichung (18) entsprechende Gleichungensystem lautet also

$$a_k = \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i C_{ik} \quad \text{mit} \quad C_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} c_{kj} \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad \ldots \ldots \ldots (38).$$

Für das Maß der Korrelation kennzeichnend ist der größte Wert K^2. Er ist zu ermitteln aus der „charakteristischen Gleichung"

$$\begin{vmatrix} C_{11} - K^2 & C_{12} & C_{13} & \ldots \\ C_{21} & C_{22} - K^2 & C_{23} & \ldots \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} - K^2 & \ldots \\ \ldots & & & \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (39).$$

Eine erste Näherung für K^2 ist $K^2 \simeq C_{11} = \sum_{j=1}^{\infty} c_{1j}^2 = k_{xy}^2$. Dieser Wert ist nichts anderes als das auf Grund von $f(x) = \varphi_1(x)$ sich ergebende Korrelationsverhältnis.

Bemerkenswert ist noch die Tatsache, daß die Größen C_{ik} auch ohne Zurückgreifen auf die Entwicklungskoeffizienten c_{ik} berechnet werden können. Wegen der Entwicklung

$$\int f(x)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i\, c_{ij}\, \psi_j(y)\, w_2(y)$$

ist nämlich mit $f(x)=\varphi_i(x)$ bzw. $f(x)=\varphi_k(x)$

$$\int \varphi_i(x)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}\, \psi_j(y)\, w_2(y) \quad \text{und} \quad \int \varphi_k(x)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x = \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}\, \psi_l(y)\, w_2(y).$$

Daher ist

$$\int \frac{1}{w_2(y)} \int \varphi_i(x)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x \int \varphi_k(x)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y$$

$$= \int \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}\, \psi_j(y) \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}\, \psi_l(y)\, w_2(y)\, d\,y = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}\, c_{kj} = C_{ik}.$$

Das Ergebnis lautet also

$$C_{ik} = \int \frac{1}{w_2(y)} \int \varphi_i(x)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x \int \varphi_k(x)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40).$$

Dem Aufbau nach sind diese Größen Verallgemeinerungen des Ausdrucks für das Korrelationsverhältnis k^2_{xy}. Dieses ergibt sich für $i=k=1$.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen erkennen, daß alle Größen der Korrelationstheorie sich ziemlich einfach mit Hilfe der Entwicklungskoeffizienten c_{ij} der Verteilung $w(x,y)$ ausdrücken lassen, und daß diese Reihenentwicklung es gestattet, die Korrelationseigenschaften gut zu übersehen. Das Korrelationsproblem wird damit auf das Problem der Reihenentwicklung von $w(x,y)$ nach den zu den Verteilungen $w_1(x)$ und $w_2(y)$ gehörigen Orthogonalpolynomen zurückgeführt. Es dürfte sich lohnen, diesem allgemeinen Entwicklungsproblem Aufmerksamkeit zu schenken und für seine praktische Durchführung Rechenverfahren zu entwickeln, welche die Lösung mit erträglichem Zeitaufwand ermöglichen.

Die hier dargestellten Überlegungen beziehen sich alle auf die Beurteilung einer vorgelegten Verteilung $w(x,y)$. Handelt es sich darum, die Ergebnisse auf umfassendere statistische Gesamtheiten zu übertragen, dann sagt die Wahrscheinlichkeitsrechnung aus, wie sehr damit zu rechnen ist, daß die Verteilung $w(x,y)$ bei Erweiterung des Beobachtungsmaterials sich ändert. Die Folgen für den Korrelationsbefund lassen sich mit Hilfe des neuen Korrelationsmaßes K infolge seiner Extremumseigenschaft besonders gut beurteilen, wie im genannten Buch des Verfassers gezeigt wird (Ergebnis von Teil E Gl. (50)). In diesem Werk wird auch die Theorie in ihren Einzelheiten an vollständig durchgerechneten Beispielen (Beispiel 34 und 35) erläutert, so daß hier von der Wiedergabe von Beispielen abgesehen werden kann.

4. Zusammenhang zwischen Korrelationstheorie und Ausgleichsrechnung.

Dadurch, daß in der hier entwickelten Korrelationstheorie die Zuordnungsfunktionen $f(x)$ und $g(y)$ in jedem Fall erst so bestimmt werden, daß der stochastische Zusammenhang zwischen x und y möglichst klar zutage tritt, besteht ein enger Zusammenhang mit der bekannten Aufgabe der Ausgleichsrechnung, eine Reihe von Beobachtungspunkten durch einen einfachen, glatten Kurvenzug möglichst gut wiederzugeben, Bild 3.

Die Beobachtungspunkte mit den jeweils zusammengehörigen Koordinaten x und y stellen, unter dem Gesichtspunkt der Statistik betrachtet, eine zweidimensionale statistische Gesamtheit mit der (arithmetischen) Häufigkeitsverteilung $w(x,y)$ dar. Der stochastische Zusammenhang zwischen x und y muß sehr eng sein, wenn Kurvenausgleich überhaupt Sinn haben soll; das Maß der Korrelation ist also nahezu gleich Eins. Die Aufgabe der Ausgleichsrechnung ist die, eine Kurve mit der Gleichung

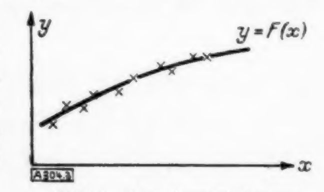


Bild 3. Zum Ausgleich einer Beobachtungsreihe.

$$y = F(x)$$

so zwischen den Beobachtungspunkten hindurchzulegen, daß das mittlere Abweichungsquadrat

$$Q = \iint (y - F(x))^2\, w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{Minimum} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

wird.

Wir arbeiten wieder mit den Orthogonalpolynomen $\varphi_1(x)$ und $\psi_j(y)$. Demnach ist wegen $\psi_1(y)=\frac{y-b}{t}$ umgekehrt $y=b+t\,\psi_1(y)$, und für $F(x)$ machen wir den Ansatz

$$F(x)=b+d_0+d_1\,\varphi_1(x)+d_2\,\varphi_2(x)+\cdots=b+\sum_{i=0}^{\infty}d_i\,\varphi_i(x).$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
Q&=\iint\Big(b+t\,\psi_1(y)-b-\sum_{i=0}^{\infty}d_i\,\varphi_i(x)\Big)^2 w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iint\Big(t\,\psi_1(y)-\sum_{i=0}^{\infty}d_i\,\varphi_i(x)\Big)^2 w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=t^2\iint\psi_1^2(y)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2t\iint\psi_1(y)\sum_{i=0}^{\infty}d_i\,\varphi_i(x)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad+\iint\Big(\sum_{i=0}^{\infty}d_i\,\varphi_i(x)\Big)^2 w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=t^2\int\psi_1^2(y)\,w_2(y)\,\mathrm{d}y-2t\sum_{i=0}^{\infty}d_i\iint\varphi_i(x)\,\psi_1(y)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad+\int\Big(\sum_{i=0}^{\infty}d_i\,\varphi_i(x)\Big)^2 w_1(x)\,\mathrm{d}x\\
&=t^2-2t\sum_{i=0}^{\infty}d_i\,c_{i\,1}+\sum_{i=0}^{\infty}d_i^2.
\end{aligned}$$

Es sind nun die Koeffizienten d_i so zu wählen, daß

$$Q=t^2-2t\sum_{i=0}^{\infty}d_i\,c_{i\,1}+\sum_{i=0}^{\infty}d_i^2=\text{Minimum} \quad\quad (41\text{a})$$

wird. Die Bedingungen dafür lauten

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}d_i}=-2t\cdot c_{i\,1}+2d_i=0,\ \text{oder}\ d_i=t\cdot c_{i\,1}\ \text{für}\ i=0,1,\ldots$$

Insbesondere ist $d_0=0$, weil stets $c_{0\,1}=0$ ist. Damit wird die bestmögliche Ausgleichsfunktion nach dem Ansatz (41)

$$F(x)=b+t\sum_{i=1}^{\infty}c_{i\,1}\,\varphi_i(x),$$

für das zugehörige Q aber ergibt sich

$$Q=t^2\Big(1-\sum_{i=1}^{\infty}c_{i\,1}^2\Big)=t^2\,(1-k_{y\,x}^2) \quad\quad (43)$$

und daher ist die mittlere, quadratische Abweichung in Ordinatenrichtung

$$\overline{\Delta y}=\sqrt{Q}=t\sqrt{1-k_{y\,x}^2} \quad\quad (44).$$

Die Koeffizienten der Ausgleichsfunktion ergeben ausgerechnet

$$\begin{aligned}
d_i=t\cdot c_{i\,1}&=t\iint\varphi_i(x)\,\psi_i(y)\,w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iint\varphi_i(x)\,(y-b)\,w(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&=\int\varphi_i(x)\,(\bar{y}(x)-b)\,w_1(x)\,\mathrm{d}x=\int\varphi_i(x)\cdot\bar{y}(x)\,w_1(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Die Größen d_i sind also gleichzeitig auch die Entwicklungskoeffizienten der Regressionslinie $\bar{y}(x)$, d. h. die beste Ausgleichsfunktion $F(x)$ ist diese Regressionslinie.

Wir erhalten damit das folgende Ergebnis: Ist eine Reihe von Beobachtungspunkten durch eine Funktion $F(x)$ auszugleichen, dann wird das mittlere Abweichungsquadrat Q zu einem Minimum, wenn man als Ausgleichsfunktion die Regressionslinie $\bar{y}(x)$ für die Ver-

XUM

teilung $w(x, y)$ der Beobachtungspunkte wählt. Der Wert von Q wird dabei gleich der Abweichung des Korrelationsverhältnisses k^2_{yx} von Eins, noch multipliziert mit dem Streuungsquadrat t^2 der Ordinaten. Nur im Falle vollständiger stochastischer Abhängigkeit wird mit $k^2_{yx} = 1$ das Abweichungsquadrat $Q = 0$. Die Aufgabe reduziert sich dann auf ein Interpolationsproblem.

Wird die beschriebene Aufgabe der Ausgleichsrechnung unter Vertauschung der Abszissen und Ordinaten durchgeführt, dann tritt an die Stelle von $\bar{y}(x)$ die andere Regressionslinie $\bar{x}(y)$ und an die Stelle von k^2_{yx} das zweite Korrelationsverhältnis k^2_{xy}. Beide sind im allgemeinen nicht identisch, und daher ergeben sich voneinander verschiedene Ausgleichskurven und im allgemeinen verschiedene Q. Ebenso wird die Ausgleichskurve etwas verändert, wenn man vor Durchführung der Ausgleichsrechnung in Abszissen- oder Ordinatenrichtung Verzerrungen vornimmt, indem man z. B. die Beobachtungspunkte logarithmisch aufträgt. Die Aufgabe der Ausgleichsrechnung ist also nicht eindeutig. Eindeutigkeit könnte sich grundsätzlich nur erreichen lassen, wenn man statt mit der einen Funktion $F(x)$ mit zwei Verzerrungsfunktionen $f(x)$ und $g(y)$ arbeiten würde, wobei an die Stelle des Variationsproblems (47), welches zum Korrelationsverhältnis führt, das allgemeine Variationsproblem für K^2 treten würde. Jedoch dürfte sich dieser Mehraufwand in der Praxis kaum lohnen.

Die Praxis stellt aber für die Aufgabe der Ausgleichsrechnung neben der Bedingung (41) noch eine zweite, nicht streng faßbare Forderung, daß nämlich die Ausgleichskurve ein möglichst einfacher und glatter Kurvenzug sein soll. Die Regressionslinie erfüllt diese Bedingung nicht immer, vor allem dann nicht, wenn die Zahl der Beobachtungspunkte verhältnismäßig gering ist. Am besten eignen sich meistens als Ausgleichskurven Polynome nicht zu hohen Grades. Solche sind die Abschnitte der Reihenentwicklung (42), denn

$$F_n(x) = b + t \sum_{i=1}^{n} c_{i1}\, \varphi_i(x) \quad \text{. . . . . (42a)}$$

ist ein Polynom n-ten Grades. Es hat überdies den Vorzug, daß man den zugehörigen Wert

$$Q = t^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{n} c^2_{i1}\right) \quad \text{. . . . . (43a)}$$

sofort angeben kann, und daß man nur weitere Entwicklungsglieder hinzuzurechnen hat, wenn die Genauigkeit durch Erhöhung des Grades n verbessert werden soll.

Die Orthogonalpolynome $\varphi_n(x)$ zur Belegung $w_1(x)$ wären somit ein ausgezeichnetes Hilfsmittel auch für die Aufgabe der Ausgleichsrechnung. Ihre Anwendung begegnet noch Schwierigkeiten, solange für die Arbeit mit diesen allgemeinen Polynomen die notwendigen Rechenverfahren nicht durchgebildet sind. Es ist hierzu bemerkenswert, daß für den Fall einer Belegung $w_1(x)$, bei welcher m äquidistante Stellen alle mit dem gleichen Gewicht $1/m$ versehen sind, diese Rechnung mit den Orthogonalpolynomen zum Zwecke des Kurvenausgleichs in der Praxis Eingang gefunden hat, und zwar bei den Arbeiten des Instituts für Konjunkturforschung. Es handelt sich dabei um die Berechnung des sog. Trends, d. h. des zeitlichen Verlaufs bestimmter Wirtschaftsgrößen, wenn von kurzdauernden Schwankungen abgesehen wird. Das Rechenverfahren wurde von Dr. Paul Lorenz im Auftrag von Prof. Dr. Ernst Wagemann entwickelt und ist im Sonderheft 9 der Vierteljahrshefte für Konjunkturforschung, Berlin (1928) mitgeteilt und in neuer Bearbeitung in Sonderheft 21, Berlin (1931).

Als Beispiel betrachten wir noch den einfachsten Fall des Kurvenausgleichs mit Hilfe einer Geraden. Hier wird die Entwicklung (42a) mit dem linearen Glied abgebrochen. Es ist wegen $c_{11} = r$

$$F(x) = b + t\, c_{11}\, \varphi_1(x) = b + \frac{t\, r}{s}(x - a).$$

Die Ausgleichsgerade hat die Gleichung

$$y - b = \frac{t\, r}{s}(x - a);$$

sie geht also unter der Richtung α gemäß der Formel $\operatorname{tg} \alpha = \frac{t\, r}{s}$ durch den Schwerpunkt $x = a$, $y = b$ der Verteilung. Die mittlere quadratische Abweichung ist

$$\overline{\Delta y} = \sqrt{1 - r^2}.$$

Beim Ausgleich durch eine Gerade tritt also an die Stelle des Korrelationsverhältnisses k^2_{yx} der Korrelationskoeffizient r.

KLEINE MITTEILUNGEN

Die Bernoullische Gleichung und die Allseitigkeit des Druckes. Die folgenden Zeilen beziehen sich auf den Druck und die Bernoullische Gleichung. Die Allseitigkeit des Druckes wird gewöhnlich durch eine Gleichgewichtsbetrachtung an einem infinitesimalen Tetraeder nachgewiesen, die Bernoullische Gleichung, in welche u. a. dieser allseitige Druck eingeht, auf dem Weg über die Eulersche Bewegungsgleichung aufgestellt. Eine elementare Darstellung, welche direkt sowohl die Bernoullische Gleichung wie die Allseitigkeit des Druckes erbringt, mag daher nicht unerwünscht sein. Wir betrachten der Reihe nach die ruhende und bewegte „ideale Flüssigkeit" (Reibungswirkung vernachlässigt); ϱ sei die Dichte, g die Erdbeschleunigung, $\varrho \cdot g = \gamma$ das spezifische Gewicht, und c die Geschwindigkeit (der Größe nach).

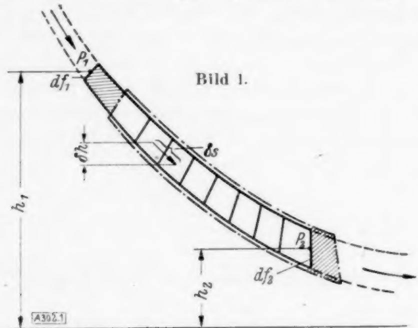


Bild 1.

1. Ruhende Flüssigkeit. Ausgehend von der Vorstellung, daß die Flüssigkeit außer der Schwerkraft nur senkrechten Druckkräften unterliegt, wollen wir an Hand von Bild 1 zeigen, daß der Druck auf ein Flächenelement $\mathrm{d}f_2$ in einem beliebigen Punkte P_2 unabhängig von der speziellen Lage des Elementes ist. Indem wir also vorläufig noch zulassen, daß der Druck von der Lage abhängt, sei p_2 der Druck für eine bestimmte Lage von $\mathrm{d}f_2$ in P_2, und analog p_1 der Druck für eine bestimmte Lage eines Elementes $\mathrm{d}f_1$ in dem von P_2 verschiedenen Punkt P_1. Alsdann konstruieren wir (was auf mannigfache Weise möglich ist) in der Figur einen „Stromfaden", welcher durch die Berandung von $\mathrm{d}f_2$ und $\mathrm{d}f_1$ geht, und der im übrigen geschlossen sei, wobei in der Figur von dieser „Ergänzung" nur ein Teil gestrichelt angedeutet ist. Nehmen wir nun als Verrückung jene vor, bei der nur die Flüssigkeit innerhalb des geschlossenen Fadens etwas verschoben wird, wodurch derselbe in Flüssigkeitsteilchen vom gleichen Inhalt $\mathrm{d}v$ aufgeteilt wird, derart, daß bei der Verrückung jedes Teilchen an die Stelle seines Vorgängers tritt und der Faden von der ausgezogenen in die strichpunktierte Lage übergeht, und bedenken, daß zu der Verrückung offensichtlich auch die entgegengesetzte existiert, so muß, da die Flüssigkeit sich im Gleichgewicht befindet, die

$$\{\text{Gesamtarbeit der beteiligten Kräfte}\} = 0 \quad . \quad (1)$$

sein. Dieselbe setzt sich zusammen

a) aus der Arbeit der Druckkräfte $p_1\,\mathrm{d}v - p_2\,\mathrm{d}v$;

b) aus der Arbeit der Schwerkraft $\sum \gamma\,\mathrm{d}v\,\delta h = \gamma\,\mathrm{d}v \sum \delta h$.

Schreiben wir jetzt (1) an, heben $\mathrm{d}v$ weg, und machen noch den Grenzübergang $\mathrm{d}v \to 0$, wodurch aus $\sum \delta h$ das entsprechende Integral $\int \mathrm{d}h = h_1 - h_2$ wird, so erhalten wir

$$(p_1 - p_2) + \gamma(h_1 - h_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

oder

$$p_1 + \gamma h_1 = p_2 + \gamma h_2 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ersetzen wir in der ganzen Überlegung $\mathrm{d}f_2$ durch den (in der Figur nicht gezeichneten) Querschnitt $\mathrm{d}f_2^*$ mit dem Druck p_2^*, so liefert uns derselbe Stromfaden die zu (3) analoge Gleichung

$$p_1 + \gamma h_1 = p_2^* + \gamma h_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

woraus durch Vergleich mit (3) folgt

$$p_2^* = p_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

(5) sagt aus, daß der Druck unabhängig von der Schnittrichtung oder allseitig ist. Sodann gibt (3) die Verteilung des Druckes im Schwerefeld an [1]).

2. Bewegte Flüssigkeit. Ist die Flüssigkeit bewegt, so gehen wir ganz ähnlich wie vorhin vor. Der Unterschied ist nur der, daß der frühere Stromfaden jetzt der eindeutig zu der festen Lage von $\mathrm{d}f_2$ gehörende Stromfaden ist, von dem $\mathrm{d}f_1$ irgendeinem festen Querschnitt in einem von P_2 verschiedenem Punkt P_1 bedeutet, und die gestrichelten Fortsetzungen sich i. a. nicht schließen. Als Verrückung betrachten wir die durch die Strömung in dem kleinen Zeitintervall $0 \ldots \mathrm{d}t$ vollzogene, so daß jetzt $\mathrm{d}v = \mathrm{d}V \cdot \mathrm{d}t$ wird, wo $\mathrm{d}V$ das kleine Durchflußvolumen des Fadens ist. Und schließlich tritt an Stelle der früheren Gleichgewichtsbedingung (1) die Arbeitsgleichung

$$\left\{\begin{matrix}\text{Gesamtarbeit der}\\ \text{beteiligten Kräfte}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Zunahme der ki-}\\ \text{netischen Energie}\end{matrix}\right\} \quad (6).$$

Alsdann geht, wie man sieht, unsere neue Überlegung in dem Spezialfall, daß die Flüssigkeit ruht, vollständig in die frühere über, und es wird daher die neue aus der Gleichung (6) sich ergebende Bedingung die frühere (3) als Spezialfall in sich enthalten. Die linke Seite von (6) berechnet sich wie oben im Falle der ruhenden Flüssigkeit. Was die rechte Seite anbelangt, so führen wir für die Geschwindigkeiten in P_1 und P_2 die Bezeichnungen c_1, c_2 ein und deuten, wo dies nötig ist, durch den oberen Zeiger (o) bzw. ($\mathrm{d}t$) noch den Zeitpunkt an, auf den sich die jeweilige Geschwindigkeit bezieht, so daß also z. B. $c_2^{(\mathrm{d}t)}$ die Geschwindigkeit c in P_2 zur Zeit $\mathrm{d}t$ bedeutet.

Bilden wir nun die Differenz der Bewegungsenergie des strichpunktierten Fadens zur Zeit $\mathrm{d}t$ und des ausgezogenen Fadens zur Zeit o, so setzt sich diese aus den beiden folgenden Gliedern zusammen:

1. aus einem Glied, welches herrührt von dem beiden Fäden nicht gemeinsamen Teil:

$$\frac{1}{2}\varrho\,\mathrm{d}v\left\{[c_2^{(\mathrm{d}t)}]^2 - [c_1^{(o)}]^2\right\}$$

2. aus einem Glied, welches herrührt von den beiden Fäden gemeinsamen Teil und das wir an der durch die Verrückung in der Figur gegebenen Einteilung in Raumzellen berechnen: pro Zelle beträgt dann der Unterschied

$$\frac{1}{2}\varrho\,\mathrm{d}v\left\{[c^{(\mathrm{d}t)}]^2 - [c^{(o)}]^2\right\};$$

hier ist die geschweifte Klammer offenbar die zeitliche Änderung ∂c^2 (für die betreffende Zelle) oder $\frac{\partial c^2}{\partial t}\mathrm{d}t = 2\frac{\partial c}{\partial t}c\,\mathrm{d}t$ und also wegen $c\,\mathrm{d}t = \delta s$ mithin $= 2\frac{\partial c}{\partial t}\delta s$, so daß man insgesamt erhält

$$\varrho\,\mathrm{d}v \sum \frac{\partial c}{\partial t}\delta s.$$

Schreiben wir jetzt (6) an, heben $\mathrm{d}v$ weg und machen noch den Grenzübergang $\mathrm{d}t \to 0$, d. h.

[1]) Wie ich nachträglich bemerkte, findet sich dieser Teil der Überlegung im wesentlichen schon bei A. Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik, 1. Bd. 1938, S. 357/358.

speziell auch $d v \to 0$, so wird aus $\sum \frac{\partial c}{\partial t} \delta s$ das entsprechende Integral $\int \frac{\partial c}{\partial t} d s$, und wir erhalten

$$(p_1 - p_2) + \gamma (h_1 - h_2) = \frac{\varrho}{2} (c_2^2 - c_1^2) + \varrho \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial c}{\partial t} d s \quad (7)$$

oder

$$p_1 + \gamma h_1 + \frac{\varrho}{2} c_1^2 = p_2 + \gamma h_2 + \frac{\varrho}{2} c_2^2 + \varrho \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial c}{\partial t} d s \quad (8),$$

wo nunmehr alle Größen sich auf den Zeitpunkt o beziehen. Ersetzen wir in der ganzen Überlegung $d f_2$ durch den (in der Figur nicht gezeichneten) Querschnitt $d f_2^*$ mit dem Druck p_2^*, so liefert uns derselbe Gedankengang die zu (8) analoge Gleichung

$$p_1 + \gamma h_1 + \frac{\varrho}{2} c_1^2 = p_2^* + \gamma h_2 + \frac{\varrho}{2} c_2^2 + \varrho \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial c}{\partial t} d s \quad (9),$$

woraus durch Vergleich mit (8) folgt

$$p_2^* = p_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

(10) sagt aus, daß der Druck unabhängig von der Schnittfläche oder allseitig ist, wobei dieser Druck stets auf das mitbewegte Flächenelement zu beziehen ist. Sodann gibt (9) die allgemeine Bernoullische Gleichung für instationäre Strömungen.

3. Stellt man sich übrigens den Druck als eine Folge der mehr oder weniger engen Packung der Moleküle vor, so ist seine Allseitigkeit evident. Ist die Flüssigkeit reibend, so führt man den Mittelwert der Normalspannung als Druck ein, der dann definitionsgemäß allseitig ist. Im Falle der Ruhe gilt auch jetzt wieder (3), während für bewegte Flüssigkeiten auf der rechten Seite von (8) ein „Verlustglied" von der Dimension eines Druckes tritt, welches daher rührt, daß mechanische Energie in Wärme übergegangen ist.

4. Spezialisieren wir auf den Fall, daß die Strömung aus der Ruhe heraus erfolgt (unter Einfluß der Schwere), d. h. die Stromfäden zu jeder Zeit aus einem Bereich kommen, wo die Flüssigkeit praktisch ruht, so erhalten wir, wenn wir den Punkt P_1 jeweils in diesem Bereich wählen, aus (8)

$$p_1 + \gamma h_1 = p_2 + \gamma h_2 + \frac{\varrho}{2} c^2 + \varrho \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial c}{\partial t} d s \quad . \ (11).$$

Hier ist nun aber die linke Seite nach 1. für alle Stromlinien dieselbe, d. h. eine nur noch von der Zeit abhängende Konstante $C(t)$. Solche Strömungen sind nun bekanntlich drehungsfrei, d. h. es ist (zu einer festen Zeit) für jede Stromlinie $\int_{P_1}^{P_2} c\, d s$ einfach das Geschwindigkeitspotential Φ im Punkte P_2 und daher das in (11) auftretende Integral dessen zeitliche Änderung

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial c}{\partial t} d s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{P_1}^{P_2} c\, d s = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad . \ . \ . \ (12),$$

womit wir für solche Strömungen die Gleichung erhalten (wenn jetzt der Zeiger 2 überall weggelassen wird)

$$p + \gamma h + \frac{\varrho}{2} c^2 + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t) \quad . \ . \ (13).$$

Die letzte Beziehung gilt nun für alle Potentialströmungen, da, wie bekannt, jede Potentialströmung durch plötzliche Stoßdrucke auf eine die Flüssigkeit umgebende Membran, deren Inneres zuächst ruht, erzeugt werden kann.

Breslau. Ernst Mohr. 302

Zur Berechnung des kleinsten Eigenwerts von $y'' + \lambda\, p(x)\, y = 0$.

Es sei gegeben $y'' + \lambda p(x) y = 0$ mit den Randwerten $y(0) = y(1) = 0$. Im Intervall $0 \leq x \leq 1$ sei p positiv und endlich.

Zur Berechnung des ersten Eigenwerts λ_1 ist in der Praxis folgendes Verfahren seit langem üblich.

Man geht von einer Funktion y_1 aus, welche die Randbedingungen erfüllt und sich dem vermuteten Verlauf der ersten Eigenfunktion möglichst annähert; also keine Nullstelle im Intervall $0 < x < 1$ hat.

Nach dem Schema

$$y_{n+1} = -\int\int p\, y_n\, d x\, d x \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

leitet man durch zeichnerische oder numerische Integration aus der „Ausgangsfunktion y_1" eine Folge von Funktionen $y_2, y_3, \ldots y_{n+1}$ ab, wobei die Integrationskonstanten bei den Integrationen so bestimmt werden, daß die Funktionen dieser Folge die Randbedingungen erfüllen.

Setzt man $Q(x) = y_n / y_{n+1}$ und ist Q_1 der größte, Q_2 der kleinste Wert, den Q annimmt, so ist $Q_1 > \lambda_1 > Q_2$ und bei hinreichend großem n wird $|Q_1 - Q_2|$ beliebig klein. Der erste Eigenwert läßt sich mithin nach diesem Verfahren mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Ein kurzer Nachweis für die Konvergenz dieser „Iterationsmethode" wird nachstehend gegeben.

Es seien φ_i die Eigenfunktionen und λ_i die Eigenwerte der Randwertaufgabe, wobei $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ sein soll.

Man denke sich nun die Ausgangsfunktion y_1 nach den Eigenfunktionen entwickelt

$$y_1 = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 + \cdots \quad . \ . \ (2).$$

Da jede Eigenfunktion der Gleichung $\varphi_i'' + \lambda_i p \varphi_i = 0$ und den Randbedingungen genügt, ist auch $\varphi_i = -\lambda_i \int\int p\, \varphi_i\, d x\, d x$ und es wird

$$Q = \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\frac{c_1 \varphi_1}{\lambda_1^{n-1}} + \frac{c_2 \varphi_2}{\lambda_2^{n-1}} + \frac{c_3 \varphi_3}{\lambda_3^{n-1}} + \cdots}{\frac{c_1 \varphi_1}{\lambda_1^{n}} + \frac{c_2 \varphi_2}{\lambda_2^{n}} + \frac{c_3 \varphi_3}{\lambda_3^{n}} + \cdots} \quad . \ . \ (3),$$

wenn man die Integration (1) mit der Entwickelung (2) durchführt. Multipliziert man den Bruch rechts mit λ_1^n im Zähler und Nenner, so wird

$$Q = \lambda_1 \cdot \frac{c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n-1} + c_3 \varphi_3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{n-1} + \cdots}{c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n} + c_3 \varphi_3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{n} + \cdots} \quad (4).$$

Da die Klammerpotenzen mit wachsendem n beliebig klein werden, folgt aus (4), daß Q bei hinreichend großem n beliebig wenig von λ_1 abweicht.

Es bleibt noch zu zeigen, daß Q Werte annimmt, die oberhalb und unterhalb λ_1 liegen. Bezeichnet man mit B den Faktor von λ_1 in (4), so genügt es, zu zeigen, daß die Funktion $(B - 1)$ im Intervall $0 < x < 1$ das Vorzeichen wechselt. Es ist

$$B - 1 = \frac{c_2 \varphi_2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n-1} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n}\right] + c_3 \varphi_3 \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{n-1} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{n}\right] + \cdots}{c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n} + c_3 \varphi_3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{n} + \cdots}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks hat nach den über y_1 gemachten Voraussetzungen keine Nullstelle. Dagegen wechselt der Zähler Z sein Vorzeichen. Wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen ist nämlich

$$\int_0^1 Z\, p\, \varphi_1\, d x = 0.$$

Da $p \varphi_1$ sein Vorzeichen nicht wechselt, muß dies bei Z der Fall sein. Damit ist bewiesen, daß erstens $Q_1 > \lambda_1 > Q_2$ ist, und zweitens, daß diese

λ_1 eingrenzenden Werte bei hinreichend großem n beliebig nahe zusammenrücken.

Aus den vorstehenden Entwickelungen ist auch ersichtlich, wie die Wahl der Ausgangsfunktion y_1 die Konvergenz beeinflußt. Je besser y_1 getroffen wird, um so kleiner werden die Beiwerte c_2, c_3, ... in der Entwickelung (2). Andererseits erkennt man auch, daß diese Methode nur für den ersten Eigenwert brauchbar ist.

Hannover. H. v. Sanden. 311

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. WALTHER **LIETZMANN,** Frühgeschichte der Geometrie auf germanischem Boden. 94 S. m. 91 Abb. Breslau 1940. Verlag Ferdinand Hirt. Preis geb. 3,50 M.

Das Buch macht den Versuch, „die Entstehung geometrischer Vorstellungen aus der Freude an schmückender Formgestaltung" in der germanischen Frühzeit nachzuweisen; die dafür herangezogenen Funde entstammen dem Bereiche von Norddeutschland, Dänemark, Südschweden und Südnorwegen. Verf. betont aber selbst (S. 15), daß „der hier behandelte große Kulturkreis der Vorgeschichte zur Entwicklung unserer wissenschaftlichen Geometrie im Gegensatz zu der babylonischen, ägyptischen, griechischen Frühgeometrie kaum Wesentliches beigetragen hat". In der Tat geht aus den Funden wohl kaum mehr hervor als ein ästhetisches Gefühl für die Schönheit gewisser Linienführungen und Formen. Weitergehende Schlüsse auf das Vorhandensein geometrischer Begriffe oder gar auf die Kenntnis geometrischer Sätze zu ziehen, wäre wohl allzu kühn und gesucht. Auch Lietzmann selbst drückt sich in dieser Beziehung nur sehr vorsichtig oder mit Fragezeichen aus. Man kann daher wohl auch weniger von einer „Frühgeschichte" als vielmehr von einer „Vorgeschichte" der Geometrie sprechen, die ohne weitere Folgen für die Wissenschaft geblieben ist, wenn sie auch vom kunstgeschichtlichen Standpunkte aus, namentlich für die Geschichte der Ornamentik, Interesse bieten mag.

Berlin. E. Mosch. 275

Dr.-Ing. BRUNO **ECK,** Technische Strömungslehre. VIII + 252 S. m. 278 Abb. Berlin 1941. Verlag Julius Springer. Preis geb. 13,50 M.

An Stelle der 1936 erschienenen „Einführung in die Technische Strömungslehre", die in 2 Bände, „Theoretische Grundlage" und „Strömungstechnisches Praktikum", geteilt war, läßt der Verfasser nunmehr ein Buch „Technische Strömungslehre" erscheinen, dem ein weiteres über die Versuchs- und Laboratoriumstechnik der Strömungslehre folgen soll.

Das vorliegende Buch ist eine Erweiterung des ersten Bandes des früheren Werkes[1]). Diese Erweiterung besteht zum Teil in einer breiteren Darstellung des Inhaltes des früheren Werkes, zum Teil in der Hinzufügung neuer Kapitel (z. B. über Kavitation und Gasdynamik). Besonders stark erweitert sind die Ausführungen über die Wirkung der Reibung in strömenden Flüssigkeiten und alles was damit zusammenhängt: Rohrströmung, Körperwiderstand, Strömungsablösung, Maßnahme zur Widerstandsverminderung usw. Hier findet man eine gute Darstellung des heute gesicherten Standes der Erfahrung und Theorie, während die zur Zeit auch schon behandelten schwierigeren Probleme der Turbulenzforschung zweckmäßigerweise noch nicht erwähnt sind. Sehr schöne Bilder, größtenteils vom Verfasser selbst aufgenommen, und die Darlegung vieler Versuchsergebnisse unterstützen und ergänzen hier den verständlich und anschaulich geschriebenen Text; auch ist genügendes Zahlenmaterial zur unmittelbaren praktischen Verwertung durch den Ingenieur beigefügt. Der Tragflügelströmung ist eine recht hübsche, durch markante Bilder unterstützte Darstellung gewidmet. Das Kapitel über Gasdynamik bringt das Wesentlichste aus diesem Gebiet in gut verständlichen Ausführungen. Im Schlußkapitel findet man nützliche Bemerkungen über strömungstechnische Messungen und Beschreibungen von Meßapparaten.

All die bisher erwähnten Kapitel geben einen schönen Überblick über die Probleme und besprechen auch in anregender Weise eine Reihe technischer Anwendungen.

Dagegen sind gegen die Darstellung der Hauptgesetze der Strömungslehre, die dem oben erwähnten Kapitel vorausgeht, erhebliche Bedenken zu erheben. Jeder, der auf diesem Gebiet lehrend tätig ist, wird die Erfahrung machen, daß gerade bei einer Einführung in diesen Gegenstand äußerste Genauigkeit und Schärfe in Ausdruck und Formulierung und im Abwägen des Wesentlichen und Unwesentlichen notwendig ist. Mit Vereinfachungen und Vernachlässigungen ist häufig gerade dem Anfänger nicht gedient, insbesondere wenn sie zu Scheinbeweisen und ausgesprochenen Unrichtigkeiten führen. Er wird dadurch nicht „schonend", wie sich der Verfasser im Vorwort ausdrückt, auf weitergehende Darstellungen vorbereitet.

Durch eine entsprechende Umarbeitung dieses Teiles würde das Buch nur gewinnen.

Karlsruhe. Spannhake VDI. 318

[1]) Siehe die Besprechung in Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1936) S. 188.

Dr.-Ing. habil. FRANZ **KARAS** VDI, Elastische Formänderung und Lastverteilung beim Doppeleingriff gerader Stirnradzähne (VDI-Forschungsheft 406, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 12, Januar/Februar 1941). 23 S. m. 13 Bildern u. 4 Zahlentaf. Berlin 1941. VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 5 M.

Bei den üblichen Zahnrädern sind abwechselnd ein Zahn, dann zwei Zähne im Eingriff. Von Belang ist die Kenntnis der Formänderung, um hieraus die Lastverteilung und die Profilkorrektion für den stoßfreien Eingriffsbeginn eines neuen Zahnes zu bestimmen. Dr. Karas berechnet die Formänderung unter Annahme eines starren Zahnradkörpers aus den drei Anteilen durch Biegung, Schub und Walzenpressung, die sich von gleicher Größenordnung ergeben und die Größe der Herstellungsfehler erreichen.

Dresden. C. Weber. 296

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. WILHELM **CAUER,** B. Apl. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin u. Leiter des Laboratoriums der Mix & Genest AG., Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 1. Bd. XII + 614 S. m. 426 Abb. Leipzig 1941. Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler Kom.-Ges. Preis geb. 45 M.

HEINRICH **DÖRRIE,** Vektoren. VIII + 300 S. München u. Berlin 1941. Verlag R. Oldenbourg. Preis geb. 13,50 M.

NACHRICHTEN

Professor Dr. Kurt Beyer 60 Jahre alt.

Am 27. Dezember 1941 vollendete Prof. Dr. Ing. Kurt Beyer das 60. Lebensjahr. Beyer ist Mitglied des Beirates der Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik und gehört zu den Gründern der dieser Zeitschrift eng verbundenen Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik.

Nach mehrjähriger Assistententätigkeit an der T. H. Dresden, wo er auch studiert und promoviert hatte, ging er 1908 als Sektionsingenieur der Staatsbahnen nach Siam, wo unter seiner Leitung zahlreiche Brücken und andere Bauten entstanden. Kurz vor Beginn des Weltkrieges kehrte er nach Deutschland zurück und trat 1915 freiwillig in das Heer ein. Nach Verwendung in verschiedenen anderen Stellen war er zuletzt beim deutschen Feldeisenbahnchef in Kleinasien tätig. 1919 wurde Beyer dann die ord. Professur für Statik der Baukonstruktionen und technische Mechanik an der T. H. Dresden übertragen. Auch weiterhin hielt er die enge Verbindung mit der Praxis aufrecht. Als technischer Berater großer Firmen war er führend insbesondere an der Entwicklung der Förderanlagen des Braunkohlentagebaus beteiligt. Großbagger und Abraumförderbrücken größten Ausmaßes entstanden unter seiner Mitwirkung.

Seine reichen Erfahrungen und seine Untersuchungen legte er in einer Reihe wissenschaftlicher Veröffentlichungen nieder, von denen das zweibändige Handbuch „Die Statik des Eisenbetonbaus“ (1933/34) besonders hervorgehoben werden muß. Für die Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik schrieb er zahlreiche wertvolle Referate von Büchern seines Fachgebietes.

Neben Praxis und Forschung entfaltete Beyer an der T. H. Dresden eine umfangreiche Lehrtätigkeit. Zahlreiche tüchtige, von den Baufirmen gesuchte Ingenieure gingen aus seiner Schule hervor. Mit E. Trefftz, C. Weber und anderen Dresdner Hochschullehrern hält er seit Jahren ein Seminar über Festigkeitslehre, in dem manchem seiner Schüler die Anregung zur Dissertation gegeben wurde.

Zu Beginn dieses Krieges stellte sich Beyer erneut der Wehrmacht zur Verfügung. Er machte den Polenfeldzug mit, wurde aber Anfang 1940 zur Betreuung wehrwirtschaftlich wichtiger Aufgaben in die Heimat zurückgerufen.

Dem auf der Höhe seines Wirkens stehenden Mann der Praxis, dem Forscher, dem Lehrer, seien noch viele Jahre erfolgreicher Arbeit beschieden. Möge er weiter wie bisher dieser Zeitschrift verbunden bleiben. Willers. 333

Neu berechnete Tafeln.

F. Tricomi, Atti R. Acc Sc. Torino, vol. 76 (1941) gibt bei $n = 1\ 2 \ldots\ 10$ die Werte der Laguerreschen Funktionen

$$l_n(t) = \frac{e^{\frac{t}{2}}}{n!} \frac{d^n}{d\,t^n} (e^{-t}\,t^n)$$

mit 4 Dezimalen für $t = 0{,}1\ 0{,}2 \ldots\ 0{,}9$ und mit 5 Dezimalen für $t = 1{,}00\ 1{,}25 \ldots\ 2{,}75;\ 3{,}0\ 3{,}5 \ldots\ 5{,}5;\ 6\ 7 \ldots\ 13;\ 14\ 16 \ldots\ 34$.

Stuttgart. Fritz Emde. 335

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Berichtigungen.

H. Ôkubo: **The stress distribution in a semi-infinite domain having a plane boundary and compressed by a rigid body** (Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940) S. 271 ∼ 276). I received from Professor Dr. Göhner some remarks on my paper published in this magazine and will make the corrections as follows:

P. 273: In the expression of $\frac{\partial u_3}{\partial \beta}$, the 3rd. term $\sum_{n=0}^{\infty} 2\,n\,D_n\,e^{-(2n+1)\alpha}$ is added. Eqs. (13) and (14) are replaced with $(\lambda + 2\,\mu)\,B_n - D_n = 0$ and $\mu\,A_n + C_n = 0$ respectively. P. 275: In eq. (23) the term $-\frac{\lambda+\mu}{2\,\mu}\,C_n$ is replaced with $-\frac{\lambda+2\,\mu}{\mu}$ and

Table I.

n	A_n	B_n	C_n	D_n
0		$-0.740 \times 10^{-9}\,P$		$-1.856 \times 10^{-5}\,P$
1	$0.507 \times 10^{-9}\,P$	0.069	$-0.416 \times 10^{-5}\,P$	0.173
2	0.055	0.025	-0.045	0.063
3	0.016	0.013	-0.013	0.033
4	0.006	0.007	-0.005	0.019
5	0.004	0.005	-0.003	0.013
6	0.001	0.003	-0.001	0.008
7	0.001	0.002	-0.001	0.006
8	0.000	0.002	-0.000	0.004
9	-0.001	0.001	0.001	0.002
10	0.001	0.001	-0.001	0.002
11	-0.000		0.000	

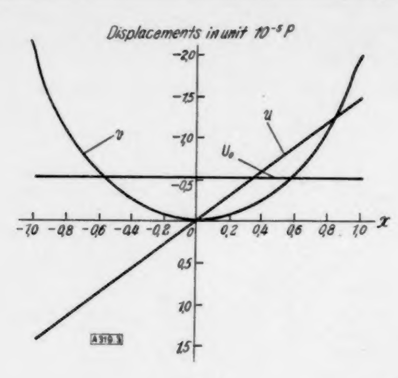


Fig. 3.

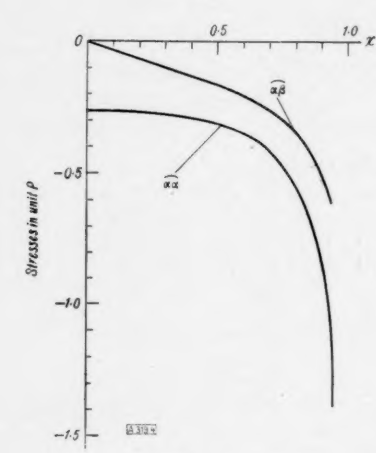


Fig. 4.

a_m with $-\frac{\mu}{\lambda+2\mu}$. And the numerical calculations in § 6 are corrected as follows: ......, the simultaneous eqs. to determine the constants A_n, B_n, C_n and D_n are $A_n = -1.2190 \times 10^{-4} C_n$, $B_n = 0.3989 \times 10^{-4} D_n$,

$$C_n = 0.3774 \times 10^{-4} \cdot \frac{nP}{4n^2-1} - 2.547\, n \sum_m \frac{D_m}{(2m+1)^2 - 4n^2},$$

$$\sum_m \frac{7.783\, n - 0.8333\, m - 0.417}{(2m+1)^2 - 4n^2} \cdot D_m = 0.1441 \times 10^{-4}\, b_n P + 1.153 \times 10^{-4} \cdot \frac{nP}{4n^2-1},$$

where

$m = 0, 1, 2, \ldots\ldots 10. \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots 11.$

The values of the constants calculated from the above simultaneous eqs. are tabulated in Table I. In this case the vertical displacement of the contact surface is $U_0 = -0.516 \times 10^{-5} P$. To compare the displacement of the contact surface in the case treated in § 4 with the result obtained here, the displacements of both cases are plotted in Fig. 3. Next we will calculate the stresses on the contact surface. From eq. (8), at $\alpha = 0$, we have

$$\left.\begin{aligned} \widehat{\alpha\alpha} &= \frac{2(\lambda+\mu)}{\sin\beta} \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, 2n \cos 2n\beta - \frac{P}{2} \\ \widehat{\alpha\beta} &= \frac{2(\lambda+\mu)\mu}{(\lambda+2\mu)\sin\beta} \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} D_n (2n+1)\cos(2n+1)\beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (24).$$

The values of stresses calculated from the above eqs. are plotted in Fig. 4[7]). The second equation in (21) does not hold at $\beta = 0$ (or $\beta = \pi$), so u_β in (20) must vanish at $\beta = 0$ if the numerical solution obtained here is continuous. While u_β is not exactly zero but is $+0.051 \times 10^{-5} P$. The discrepancy is caused by the neglection of the higher terms of the trigonometric series which give some influence on the result near the point $\beta = 0$.

Yonezawa, Japan. H. Ôkubo. 319

W i l l e r s : **Benutzung projektiver Skalen zur Unterteilung von Skalen anderer Funktionen.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940) S. 291 bis 292.

Herr Dr. H e i n r i c h - Breslau macht mich freundlicherweise auf zwei Versehen in der Durchrechnung des Beispieles in obiger Notiz aufmerksam, deshalb sei die Rechnung hier nochmals kurz wiederholt. Die Abweichung der durch projektive Unterteilung zwischen den drei Punkten

$$x_1 = \frac{4\pi}{18}, \qquad x_2 = \frac{\pi}{4}, \qquad x_3 = \frac{5\pi}{18}$$

einer tg-Skala gewonnenen Teilpunkte von den exakten wird nach Schwerdt abgeschätzt durch

$$R = x_2^3 \left[\frac{1}{3!} f'''(\zeta) + \frac{b - a\cdot u}{(\zeta + d)^4}\right] \quad \left(|\zeta| \leq \frac{\pi}{36}\right).$$

Das gibt hier $R < 0{,}001$. Die in der Mitteilung abgeleitete Formel gibt

$$R = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3!\,(x - 1{,}785)^2}$$
$$\left[\frac{6 - 4\cos^2\zeta}{\cos^4\zeta}(\zeta - 1{,}785)^2 + \frac{12\sin\zeta}{\cos^3\zeta}(\zeta - 1{,}785) + \frac{6}{\cos^2\zeta}\right].$$

Die eckige Klammer ist in dem Bereich von 40° bis zu 50° positiv und kleiner als 4,2, so daß hier $R < 0{,}0002$ wird. Soll die Abweichung der genäherten Teilung von der exakten kleiner als 0,01 cm werden, würde man nach der ersten Abschätzung Maßeinheiten bis zu 10 cm, nach der zweiten bis zu 50 cm als zulässig erhalten. An dem wesentlichen Ergebnis, daß die zweite Formel zu einer brauchbareren Abschätzung führt als die erste, ändert sich also nichts.

Dresden. W i l l e r s. 334

H. G ö r t l e r, **Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden gegenüber gewissen dreidimensionalen Störungen.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 250 bis 252.

Auf S. 250 ist ein Druckfehler übersehen worden. In (2) muß die letzte Zeile natürlich lauten:

$$= -2a^2\delta^2\left(\frac{U_0\,\delta}{\nu}\right)^2 \frac{\delta}{R}\, U u'.$$

Der Buchstabe U war vergessen worden.

Göttingen. H. G ö r t l e r. 332

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. W i l l e r s, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —
Copyright 1939 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. — Druck von A. W. Z i c k f e l d t, Osterwieck am Harz.

XUM